Le plus grand déplacement dans une marche aléatoire branchante en temps inhomogène

Bastien Mallein

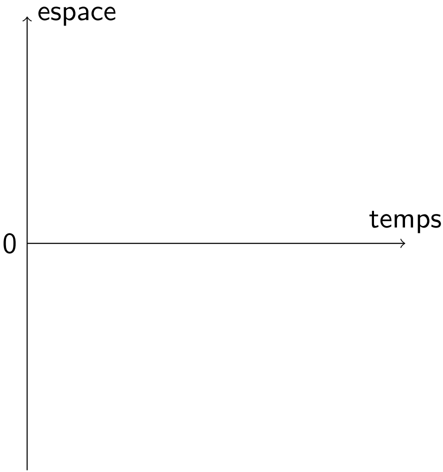
JPS 2014
Le 07/04/2014

Plan

Plan

Plan

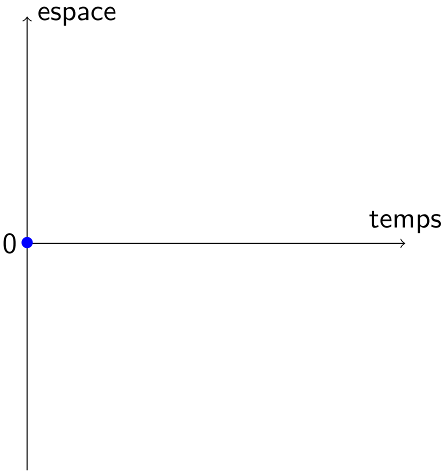
Description du modèle



Description

- Unique individu en 0 à l'instant 0.
- A sa mort, donne naissance à des enfants autour de lui.
- De façon indépendante, chaque enfant se reproduit à son tour.
- Le processus continue ainsi, génération après génération.
- On s'intéresse à l'individu réalisant le plus grand déplacement.

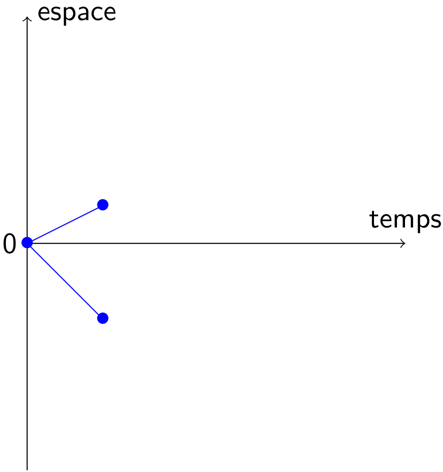
Description du modèle



Description

- Unique individu en 0 à l'instant 0.
- A sa mort, donne naissance à des enfants autour de lui.
- De façon indépendante, chaque enfant se reproduit à son tour.
- Le processus continue ainsi, génération après génération.
- On s'intéresse à l'individu réalisant le plus grand déplacement.

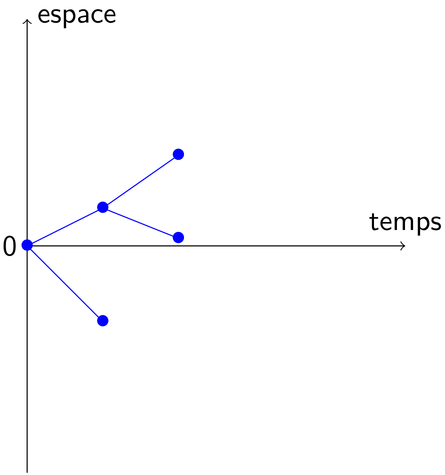
Description du modèle



Description

- Unique individu en 0 à l'instant 0.
- A sa mort, donne naissance à des enfants autour de lui.
- De façon indépendante, chaque enfant se reproduit à son tour.
- Le processus continue ainsi, génération après génération.
- On s'intéresse à l'individu réalisant le plus grand déplacement.

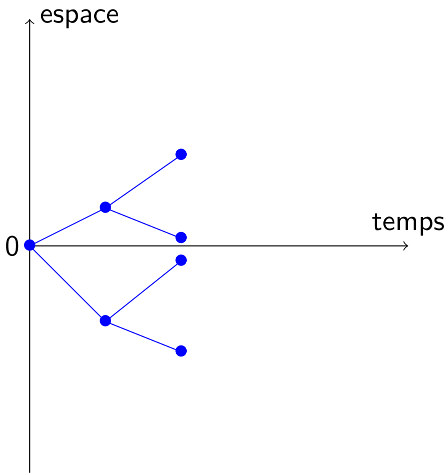
Description du modèle



Description

- Unique individu en 0 à l'instant 0.
- A sa mort, donne naissance à des enfants autour de lui.
- De façon indépendante, chaque enfant se reproduit à son tour.
- Le processus continue ainsi, génération après génération.
- On s'intéresse à l'individu réalisant le plus grand déplacement.

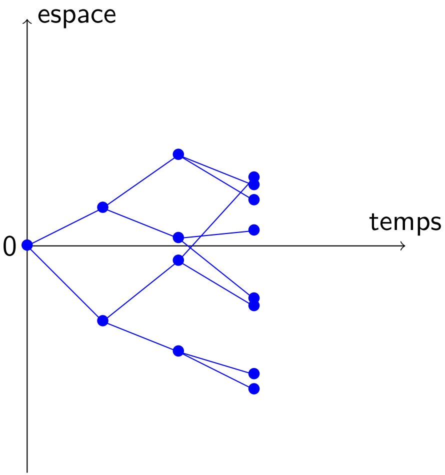
Description du modèle



Description

- Unique individu en 0 à l'instant 0.
- A sa mort, donne naissance à des enfants autour de lui.
- De façon indépendante, chaque enfant se reproduit à son tour.
- Le processus continue ainsi, génération après génération.
- On s'intéresse à l'individu réalisant le plus grand déplacement.

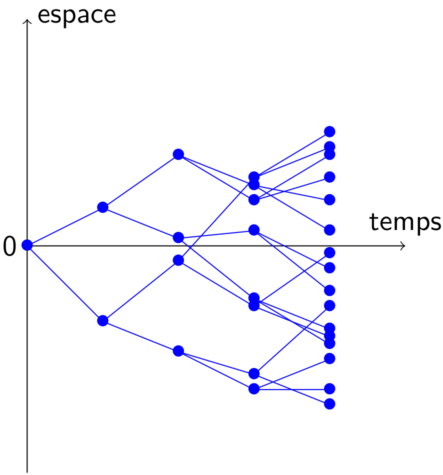
Description du modèle



Description

- Unique individu en 0 à l'instant 0.
- A sa mort, donne naissance à des enfants autour de lui.
- De façon indépendante, chaque enfant se reproduit à son tour.
- Le processus continue ainsi, génération après génération.
- On s'intéresse à l'individu réalisant le plus grand déplacement.

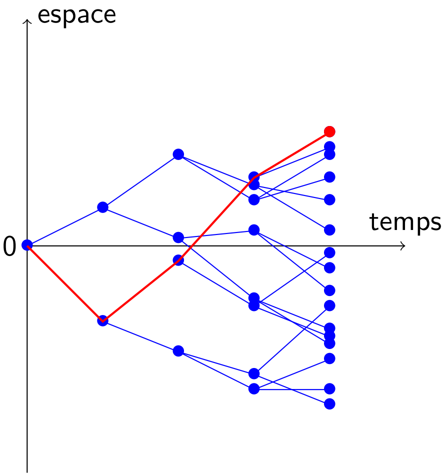
Description du modèle



Description

- Unique individu en 0 à l'instant 0.
- A sa mort, donne naissance à des enfants autour de lui.
- De façon indépendante, chaque enfant se reproduit à son tour.
- Le processus continue ainsi, génération après génération.
- On s'intéresse à l'individu réalisant le plus grand déplacement.

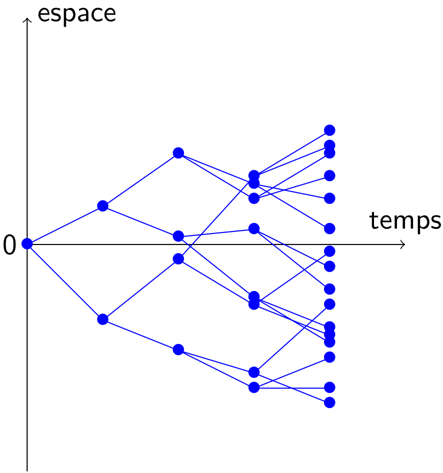
Description du modèle



Description

- Unique individu en 0 à l'instant 0.
- A sa mort, donne naissance à des enfants autour de lui.
- De façon indépendante, chaque enfant se reproduit à son tour.
- Le processus continue ainsi, génération après génération.
- On s'intéresse à l'individu réalisant le plus grand déplacement.

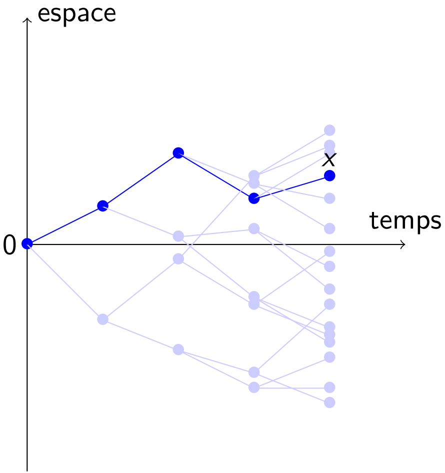
Quelques notations



Notations

- Soit x un individu.
- $V(x)$ représente sa position.
- $|x|$ la génération à laquelle x appartient.
- x_k est l'ancêtre de x vivant à la génération k.

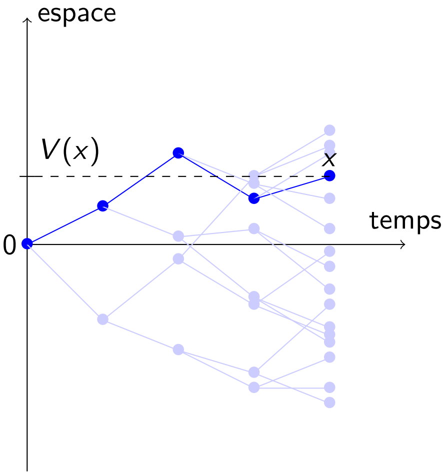
Quelques notations



Notations

- Soit x un individu.
- $V(x)$ représente sa position.
- $|x|$ la génération à laquelle x appartient.
- x_k est l'ancêtre de x vivant à la génération k.

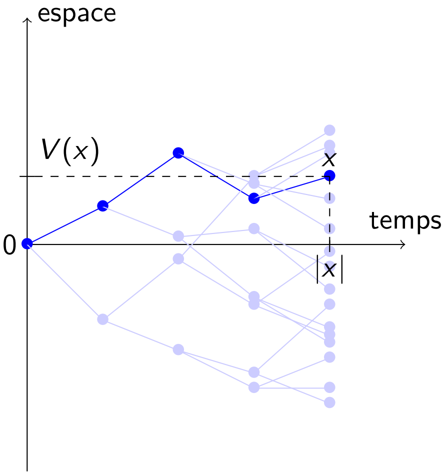
Quelques notations



Notations

- Soit x un individu.
- $V(x)$ représente sa position.
- $|x|$ la génération à laquelle x appartient.
- x_k est l'ancêtre de x vivant à la génération k.

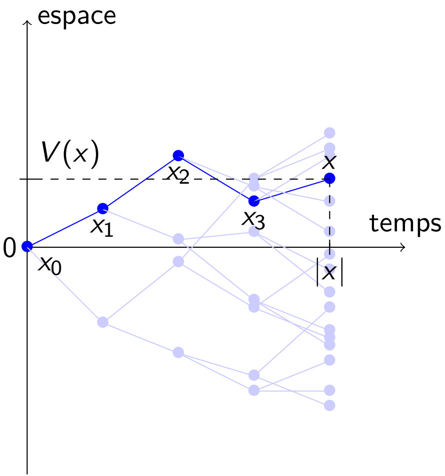
Quelques notations



Notations

- Soit x un individu.
- $V(x)$ représente sa position.
- $|x|$ la génération à laquelle x appartient.
- x_k est l'ancêtre de x vivant à la génération k.

Quelques notations



Notations

- Soit x un individu.
- $V(x)$ représente sa position.
- $|x|$ la génération à laquelle x appartient.
- x_k est l'ancêtre de x vivant à la génération k.

Loi de la marche branchante

Mécanisme de reproduction

Soit $(\mathcal{L}_k, k \geq 0)$ une suite de lois de processus de points sur $\mathbb{R}$, i.e. des mesures de probabilité sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}^n$.

Definition

Une marche aléatoire branchante de loi de reproduction $(\mathcal{L}_k)$ est la donnée de

- un arbre généalogique $\mathbf{T}$;
- pour chaque individu $x \in \mathbf{T}$, sa position $V(x) \in \mathbb{R}$;
- les déplacements relatifs $(V(y) - V(x), y \text{ enfant de } x)$ sont indépendants les uns des autres ;
- si $|x| = n$, $(V(y) - V(x), y \text{ enfant de } x)$ est de loi $\mathcal{L}_n$.

Loi de la marche branchante

Mécanisme de reproduction

Soit $(\mathcal{L}_k, k \geq 0)$ une suite de lois de processus de points sur $\mathbb{R}$, i.e. des mesures de probabilité sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}^n$.

Definition

Une marche aléatoire branchante de loi de reproduction $(\mathcal{L}_k)$ est la donnée de

- un arbre généalogique $\mathbf{T}$;
- pour chaque individu $x \in \mathbf{T}$, sa position $V(x) \in \mathbb{R}$;
- les déplacements relatifs $(V(y) - V(x), y$ enfant de $x)$ sont indépendants les uns des autres ;
- si $|x| = n$, $(V(y) - V(x), y$ enfant de $x)$ est de loi $\mathcal{L}_n$.

Loi de la marche branchante

Mécanisme de reproduction

Soit $(\mathcal{L}_k, k \geq 0)$ une suite de lois de processus de points sur $\mathbb{R}$, i.e. des mesures de probabilité sur $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}^n$.

Definition

Une marche aléatoire branchante de loi de reproduction $(\mathcal{L}_k)$ est la donnée de

- un arbre généalogique $\mathbf{T}$;
- pour chaque individu $x \in \mathbf{T}$, sa position $V(x) \in \mathbb{R}$;
- les déplacements relatifs $(V(y) - V(x), y$ enfant de $x)$ sont indépendants les uns des autres ;
- si $|x| = n$, $(V(y) - V(x), y$ enfant de $x)$ est de loi $\mathcal{L}_n$.

Loi de la marche branchante

Mécanisme de reproduction

Soit $(\mathcal{L}_k, k \geq 0)$ une suite de lois de processus de points sur $\mathbb{R}$, i.e. des mesures de probabilité sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}^n$.

Definition

Une marche aléatoire branchante de loi de reproduction $(\mathcal{L}_k)$ est la donnée de

- un arbre généalogique $\mathbf{T}$;
- pour chaque individu $x \in \mathbf{T}$, sa position $V(x) \in \mathbb{R}$;
- les déplacements relatifs $(V(y) - V(x), y$ enfant de $x)$ sont indépendants les uns des autres ;
- si $|x| = n$, $(V(y) - V(x), y$ enfant de $x)$ est de loi $\mathcal{L}_n$.

Loi de la marche branchante

Mécanisme de reproduction

Soit $(\mathcal{L}_k, k \geq 0)$ une suite de lois de processus de points sur $\mathbb{R}$, i.e. des mesures de probabilité sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}^n$.

Definition

Une marche aléatoire branchante de loi de reproduction $(\mathcal{L}_k)$ est la donnée de

- un arbre généalogique $\mathbf{T}$;
- pour chaque individu $x \in \mathbf{T}$, sa position $V(x) \in \mathbb{R}$;
- les déplacements relatifs $(V(y) - V(x), y$ enfant de $x)$ sont indépendants les uns des autres ;
- si $|x| = n$, $(V(y) - V(x), y$ enfant de $x)$ est de loi $\mathcal{L}_n$.

Loi de la marche branchante

Mécanisme de reproduction

Soit $(\mathcal{L}_k, k \geq 0)$ une suite de lois de processus de points sur $\mathbb{R}$, i.e. des mesures de probabilité sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}^n$.

Definition

Une marche aléatoire branchante de loi de reproduction $(\mathcal{L}_k)$ est la donnée de

- un arbre généalogique $\mathbf{T}$;
- pour chaque individu $x \in \mathbf{T}$, sa position $V(x) \in \mathbb{R}$;
- les déplacements relatifs $(V(y) - V(x), y$ enfant de $x)$ sont indépendants les uns des autres ;
- si $|x| = n$, $(V(y) - V(x), y$ enfant de $x)$ est de loi $\mathcal{L}_n$.

Quelques notations additionnelles

Soit $(\ell_n^k, n \leq N)$ de loi $\mathcal{L}_k$.

Transformée de log-Laplace

$$\forall \theta > 0, \quad \kappa_k(\theta) = \log \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{\theta \ell_n^k} \right)$$

Transformée de Cramér

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \kappa_k^*(a) = \sup_{\theta > 0}(\theta a - \kappa_k(\theta))$$

Propriété

Si $a = \kappa_k'(\theta)$ alors $\kappa_k^*(a) = \theta a - \kappa_k(\theta)$.

Quelques notations additionnelles

Soit $(\ell_n^k, n \leq N)$ de loi $\mathcal{L}_k$.

Transformée de log-Laplace

$$\forall \theta > 0, \quad \kappa_k(\theta) = \log \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{\theta \ell_n^k} \right)$$

Transformée de Cramér

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \kappa_k^*(a) = \sup_{\theta > 0}(\theta a - \kappa_k(\theta))$$

Propriété

Si $a = \kappa_k'(\theta)$ alors $\kappa_k^*(a) = \theta a - \kappa_k(\theta)$.

Quelques notations additionnelles

Soit $(\ell_n^k, n \leq N)$ de loi $\mathcal{L}_k$.

Transformée de log-Laplace

$$\forall \theta > 0, \quad \kappa_k(\theta) = \log \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{\theta \ell_n^k} \right)$$

Transformée de Cramér

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \kappa_k^*(a) = \sup_{\theta > 0}(\theta a - \kappa_k(\theta))$$

Propriété

Si $a = \kappa_k'(\theta)$ alors $\kappa_k^*(a) = \theta a - \kappa_k(\theta)$.

Quelques notations additionnelles

Soit $(\ell_n^k, n \leq N)$ de loi $\mathcal{L}_k$.

Transformée de log-Laplace

$$\forall \theta > 0, \quad \kappa_k(\theta) = \log \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{\theta \ell_n^k}\right)$$

Transformée de Cramér

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \kappa_k^*(a) = \sup_{\theta>0}(\theta a - \kappa_k(\theta))$$

Propriété

Si $a = \kappa_k'(\theta)$ alors $\kappa_k^*(a) = \theta a - \kappa_k(\theta)$.

Lemme Many-to-one

Lemme (Many-to-one)

Soit $(\theta_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, *on pose* (X_k) *des variables aléatoires indépendantes vérifiant*

$$\mathbb{E}\left(f(X_k)\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} f(\ell_k) e^{\theta_k \ell_k - \kappa_k(\theta_k)}\right]$$

et $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.

Pour toute fonction mesurable g, *on a*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} g(V(x_j), j \leq n)\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^{n} \theta_j X_j - \kappa_j(\theta_j)} g(S_j, j \leq n)\right].$$

Lemme Many-to-one

Lemme (Many-to-one)

Soit $(\theta_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, *on pose* (X_k) *des variables aléatoires indépendantes vérifiant*

$$\mathbb{E}\left(f(X_k)\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} f(\ell_k) e^{\theta_k \ell_k - \kappa_k(\theta_k)}\right]$$

et $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.
Pour toute fonction mesurable g, *on a*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} g(V(x_j), j \leq n)\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^{n} \theta_j X_j - \kappa_j(\theta_j)} g(S_j, j \leq n)\right].$$

Lemme Many-to-one

Lemme (Many-to-one)

Soit $(\theta_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, on pose (X_k) des variables aléatoires indépendantes vérifiant

$$\mathbb{E}\left(f(X_k)\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} f(\ell_k) e^{\theta_k \ell_k - \kappa_k(\theta_k)}\right]$$

et $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.

Pour toute fonction mesurable g, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} g(V(x_j), j \leq n)\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^{n} \theta_j X_j - \kappa_j(\theta_j)} g(S_j, j \leq n)\right].$$

Lemme Many-to-one

Lemme (Many-to-one)

Soit $(\theta_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, on pose (X_k) des variables aléatoires indépendantes vérifiant

$$\mathbb{E}\left(f(X_k)\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} f(\ell_k) e^{\theta_k \ell_k - \kappa_k(\theta_k)}\right]$$

et $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.
Pour toute fonction mesurable g, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} g(V(x_j), j \leq n)\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^{n} \theta_j X_j - \kappa_j(\theta_j)} g(S_j, j \leq n)\right].$$

Transformation d'Abel

On pose $a_k := \kappa_k'(\theta_k) = \mathbb{E}(X_k)$ et $\widetilde{S_k} = S_k - \mathbb{E}(S_k)$.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} g(V(x_j), j \leq n)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j X_j - \kappa_j(\theta_j)} g(S_j, j \leq n)\right]$$

$$= e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j a_j - \kappa_j(\theta_j)} \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j (X_j - a_j)} g(S_j, j \leq n)\right]$$

$$= e^{-\sum_{j=1}^n \kappa_j^*(a_j)} \mathbb{E}\left[e^{-\theta_n \widetilde{S}_n + \sum_{j=1}^n (\theta_j - \theta_{j-1}) \widetilde{S}_j} g(S_j, j \leq n)\right]$$

Transformation d'Abel

On pose $a_k := \kappa_k'(\theta_k) = \mathbb{E}(X_k)$ et $\widetilde{S_k} = S_k - \mathbb{E}(S_k)$.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} g(V(x_j), j \leq n)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j X_j - \kappa_j(\theta_j)} g(S_j, j \leq n)\right]$$

$$= e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j a_j - \kappa_j(\theta_j)} \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j (X_j - a_j)} g(S_j, j \leq n)\right]$$

$$= e^{-\sum_{j=1}^n \kappa_j^*(a_j)} \mathbb{E}\left[e^{-\theta_n \widetilde{S}_n + \sum_{j=1}^n (\theta_j - \theta_{j-1}) \widetilde{S}_j} g(S_j, j \leq n)\right]$$

Transformation d'Abel

On pose $a_k := \kappa'_k(\theta_k) = \mathbb{E}(X_k)$ et $\widetilde{S_k} = S_k - \mathbb{E}(S_k)$.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} g(V(x_j), j \leq n)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j X_j - \kappa_j(\theta_j)} g(S_j, j \leq n)\right]$$
$$= e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j a_j - \kappa_j(\theta_j)} \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j (X_j - a_j)} g(S_j, j \leq n)\right]$$
$$= e^{-\sum_{j=1}^n \kappa_j^*(a_j)} \mathbb{E}\left[e^{-\theta_n \widetilde{S}_n + \sum_{j=1}^n (\theta_j - \theta_{j-1}) \widetilde{S}_j} g(S_j, j \leq n)\right]$$

Transformation d'Abel

On pose $a_k := \kappa_k'(\theta_k) = \mathbb{E}(X_k)$ et $\widetilde{S_k} = S_k - \mathbb{E}(S_k)$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} g(V(x_j), j \leq n)\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j X_j - \kappa_j(\theta_j)} g(S_j, j \leq n)\right] \\
&\qquad = e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j a_j - \kappa_j(\theta_j)} \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{j=1}^n \theta_j (X_j - a_j)} g(S_j, j \leq n)\right] \\
&\qquad = e^{-\sum_{j=1}^n \kappa_j^*(a_j)} \mathbb{E}\left[e^{-\theta_n \widetilde{S}_n + \sum_{j=1}^n (\theta_j - \theta_{j-1}) \widetilde{S}_j} g(S_j, j \leq n)\right]
\end{aligned}$$

Marche aléatoire branchante en temps inhomogène

Définition

Soit $(\mathcal{L}_t, t \in [0,1])$ une famille de lois de processus de points telle que $(\kappa_t(\theta), t \in [0,1], \theta > 0) \in \mathcal{C}^{1,2}$.
La marche aléatoire branchante de longueur n avec processus de reproduction $(\mathcal{L}_{k/n}, k \leq n)$ est appelée marche aléatoire branchante en temps inhomogène.

Plus grand déplacement

On note $M_n = \max_{|x|=n} V(x)$.

Marche aléatoire branchante en temps inhomogène

Définition

Soit $(\mathcal{L}_t, t \in [0,1])$ une famille de lois de processus de points telle que $(\kappa_t(\theta), t \in [0,1], \theta > 0) \in \mathcal{C}^{1,2}$.
La marche aléatoire branchante de longueur n avec processus de reproduction $(\mathcal{L}_{k/n}, k \leq n)$ est appelée marche aléatoire branchante en temps inhomogène.

Plus grand déplacement

On note $M_n = \max_{|x|=n} V(x)$.

Nombre d'individus suivant un chemin donné

Soit $(a_t)_{t\in[0,1]}$ un chemin, et θ_t tel que $\kappa'_t(\theta_t) = a_t$.
On calcule le nombre d'individus qui suivent le chemin $(\int a_s ds)$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} \mathbf{1}_{\left\{|V(x_j)-\sum_{i=0}^{j} a_{i/n}|\leq\sqrt{n}, j\leq n\right\}}\right]\\
&\qquad = e^{-\sum_{j=1}^{n}\kappa^*_{j/n}(a_{j/n})}\,\mathbb{E}\left[e^{-\theta_1\widetilde{S}_n+\sum_{j=1}^{n}(\theta_{j/n}-\theta_{j-1/n})\widetilde{S}_j}\mathbf{1}_{\left\{\max|\widetilde{S}_j|\leq\sqrt{n}\right\}}\right]\\
&\qquad = e^{-n\int_0^1 \kappa^*_s(a_s)ds+O(\sqrt{n})}
\end{aligned}$$

Nombre d'individus suivant un chemin donné

Soit $(a_t)_{t\in[0,1]}$ un chemin, et θ_t tel que $\kappa_t'(\theta_t) = a_t$.
On calcule le nombre d'individus qui suivent le chemin $(\int a_s ds)$.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} \mathbf{1}_{\left\{|V(x_j)-\sum_{i=0}^{j} a_{i/n}|\leq\sqrt{n}, j\leq n\right\}}\right]$$
$$= e^{-\sum_{j=1}^{n} \kappa^*_{j/n}(a_{j/n})} \mathbb{E}\left[e^{-\theta_1 \widetilde{S}_n + \sum_{j=1}^{n}(\theta_{j/n}-\theta_{j-1/n})\widetilde{S}_j} \mathbf{1}_{\left\{\max|\widetilde{S}_j|\leq\sqrt{n}\right\}}\right]$$
$$= e^{-n\int_0^1 \kappa^*_s(a_s)ds + O(\sqrt{n})}$$

Nombre d'individus suivant un chemin donné

Soit $(a_t)_{t\in[0,1]}$ un chemin, et θ_t tel que $\kappa_t'(\theta_t) = a_t$.
On calcule le nombre d'individus qui suivent le chemin $(\int a_s ds)$.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} \mathbf{1}_{\left\{|V(x_j) - \sum_{i=0}^{j} a_{i/n}| \leq \sqrt{n}, j \leq n\right\}}\right]$$

$$= e^{-\sum_{j=1}^{n} \kappa^*_{j/n}(a_{j/n})}\, \mathbb{E}\left[e^{-\theta_1 \widetilde{S}_n + \sum_{j=1}^{n} (\theta_{j/n} - \theta_{j-1/n}) \widetilde{S}_j} \mathbf{1}_{\left\{\max |\widetilde{S}_j| \leq \sqrt{n}\right\}}\right]$$

$$= e^{-n \int_0^1 \kappa_s^*(a_s) ds + O(\sqrt{n})}$$

Nombre d'individus suivant un chemin donné

Soit $(a_t)_{t\in[0,1]}$ un chemin, et θ_t tel que $\kappa'_t(\theta_t) = a_t$.
On calcule le nombre d'individus qui suivent le chemin $(\int a_s ds)$.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=n} \mathbf{1}_{\left\{|V(x_j)-\sum_{i=0}^{j} a_{i/n}|\leq\sqrt{n}, j\leq n\right\}}\right]$$
$$= e^{-\sum_{j=1}^{n} \kappa^*_{j/n}(a_{j/n})} \mathbb{E}\left[e^{-\theta_1 \widetilde{S}_n+\sum_{j=1}^{n}(\theta_{j/n}-\theta_{j-1/n})\widetilde{S}_j} \mathbf{1}_{\left\{\max|\widetilde{S}_j|\leq\sqrt{n}\right\}}\right]$$
$$= e^{-n\int_0^1 \kappa^*_s(a_s)ds+O(\sqrt{n})}$$

Nombre d'individus suivant un chemin donné

Soit $(a_t)_{t\in[0,1]}$ un chemin, et θ_t tel que $\kappa_t'(\theta_t) = a_t$.
On calcule le nombre d'individus qui suivent le chemin $(\int a_s ds)$.

Propriété

Il existe des individus qui suivent le chemin $(\int a_s ds)$ ssi

$$\forall t \in [0,1], \quad \int_0^t \kappa_s^*(a_s)ds \leq 0.$$

Un résultat d'analyse convexe

Lemme

Il existe un unique $(a_t, t \in [0,1])$ *solution du problème d'optimisation*

$$\max\left\{ \int_0^1 b_s ds : \forall t \leq 1, \int_0^t \kappa_s^*(b_s) ds \leq 0 \right\}.$$

De plus

- θ *est croissante,*
- $\int_0^1 \kappa_s^*(a_s) ds = 0,$
- θ *constant sur* $\left\{ t \in [0,1] : \int_0^t \kappa_s^*(a_s) ds < 0 \right\}.$

Un résultat d'analyse convexe

Lemme

Il existe un unique $(a_t, t \in [0,1])$ *solution du problème d'optimisation*

$$\max\left\{\int_0^1 b_s ds : \forall t \leq 1, \int_0^t \kappa_s^*(b_s)ds \leq 0\right\}.$$

De plus

- θ *est croissante,*
- $\int_0^1 \kappa_s^*(a_s)ds = 0,$
- θ *constant sur* $\left\{t \in [0,1] : \int_0^t \kappa_s^*(a_s)ds < 0\right\}.$

Un résultat d'analyse convexe

Lemme

Il existe un unique $(a_t, t \in [0,1])$ *solution du problème d'optimisation*

$$\max \left\{ \int_0^1 b_s ds : \forall t \leq 1, \int_0^t \kappa_s^*(b_s) ds \leq 0 \right\}.$$

De plus

- θ *est croissante,*
- $\int_0^1 \kappa_s^*(a_s) ds = 0,$
- θ *constant sur* $\left\{ t \in [0,1] : \int_0^t \kappa_s^*(a_s) ds < 0 \right\}.$

Un résultat d'analyse convexe

Lemme

Il existe un unique $(a_t, t \in [0,1])$ *solution du problème d'optimisation*

$$\max \left\{ \int_0^1 b_s ds : \forall t \leq 1, \int_0^t \kappa_s^*(b_s) ds \leq 0 \right\}.$$

De plus

- θ *est croissante,*
- $\int_0^1 \kappa_s^*(a_s) ds = 0$*,*
- θ *constant sur* $\left\{ t \in [0,1] : \int_0^t \kappa_s^*(a_s) ds < 0 \right\}$.

Le plus grand déplacement

Théorème

Soit a la solution du problème d'optimisation ci-dessus. Si θ admet une dérivée Riemann-intégrable, on a

$$M_n = n \int_0^1 a_s ds + n^{1/3} \int_0^1 \frac{A \left(\dot{\theta}_s \sigma_s\right)^{2/3}}{2^{1/3} \theta_s} ds + o(n^{1/3}) \quad \text{p.s.}$$

où $\sigma_t^2 = \partial^2_{\theta\theta} \kappa_t(\theta_t)$, et $A \approx -2,3381...$ est le premier zéro de la fonction d'Airy de première espèce.

Une estimée à la Mogul'skii

Lemme

Soit $\widetilde{S}$ la marche aléatoire définie par le Lemme 2.1, et $f, g : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction Riemann-intégrable, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1/3}} \log \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \dot{\theta}_{j/n}\widetilde{S}_{j/n}} \mathbf{1}_{\left\{\widetilde{S}_j \leq n^{1/3} f_{j/n}, j\leq n\right\}} \right] = \int_0^1 \dot{\theta}_s f_s + \frac{A}{2^{1/3}} (\dot{\theta}_s \sigma_s)^{2/3} ds.$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=nt} \mathbf{1}_{\left\{V(x_j)\leq n\int_0^{j/n} a_s ds + n^{1/3} f_{j/n}\right\}} \mathbf{1}_{\left\{V(x)\geq n\int_0^t a_s ds + n^{1/3} f(t)\right\}}\right]$$

$$\approx e^{-n\int_0^t \kappa_s^*(a_s)ds}\, \mathbb{E}\left[e^{-\theta_t \widetilde{S}_{nt} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{nt} \dot{\theta}_{j/n} \widetilde{S}_j} \mathbf{1}_{\left\{\widetilde{S}_j \leq n^{1/3} f_{j/n}\right\}} \mathbf{1}_{\left\{S_{nt}\geq n^{1/3} f_t\right\}}\right]$$

$$\approx e^{-n\int_0^t \kappa_s^*(a_s)ds} \exp\left[n^{1/3}\left(-\theta_t f_t + \int_0^t \dot{\theta}_s f_s + \frac{A}{2^{1/3}}\left(\dot{\theta}_s \sigma_s\right)^{2/3} ds\right)\right].$$

La solution de l'équation différentielle

$$\theta_t y_t = \int_0^t \dot{\theta}_s y_s + \frac{A}{2^{1/3}}\left(\dot{\theta}_s \sigma_s\right)^{2/3} ds$$

est $f_t = \int_0^t \frac{A(\dot{\theta}_s \sigma_s)^{2/3}}{2^{1/3}\theta_s} ds$.

Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=nt} \mathbf{1}_{\left\{V(x_j)\leq n\int_0^{j/n} a_s ds + n^{1/3} f_{j/n}\right\}} \mathbf{1}_{\left\{V(x)\geq n\int_0^t a_s ds + n^{1/3} f(t)\right\}}\right]$$
$$\approx e^{-n\int_0^t \kappa_s^*(a_s)ds}\, \mathbb{E}\left[e^{-\theta_t \widetilde{S}_{nt} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{nt} \dot{\theta}_{j/n}\widetilde{S}_j} \mathbf{1}_{\left\{\widetilde{S}_j\leq n^{1/3} f_{j/n}\right\}} \mathbf{1}_{\left\{S_{nt}\geq n^{1/3} f_t\right\}}\right]$$
$$\approx e^{-n\int_0^t \kappa_s^*(a_s)ds} \exp\left[n^{1/3}\left(-\theta_t f_t + \int_0^t \dot{\theta}_s f_s + \frac{A}{2^{1/3}}\left(\dot{\theta}_s\sigma_s\right)^{2/3} ds\right)\right].$$

La solution de l'équation différentielle

$$\theta_t y_t = \int_0^t \dot{\theta}_s y_s + \frac{A}{2^{1/3}}\left(\dot{\theta}_s\sigma_s\right)^{2/3} ds$$

est $f_t = \int_0^t \frac{A(\dot{\theta}_s\sigma_s)^{2/3}}{2^{1/3}\theta_s} ds$.

Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=nt} \mathbf{1}_{\left\{V(x_j)\leq n\int_0^{j/n} a_s ds + n^{1/3} f_{j/n}\right\}} \mathbf{1}_{\left\{V(x)\geq n\int_0^t a_s ds + n^{1/3} f(t)\right\}}\right]$$
$$\approx e^{-n\int_0^t \kappa_s^*(a_s)ds}\, \mathbb{E}\left[e^{-\theta_t \widetilde{S}_{nt} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{nt} \dot{\theta}_{j/n} \widetilde{S}_j} \mathbf{1}_{\left\{\widetilde{S}_j \leq n^{1/3} f_{j/n}\right\}} \mathbf{1}_{\left\{S_{nt}\geq n^{1/3} f_t\right\}}\right]$$
$$\approx e^{-n\int_0^t \kappa_s^*(a_s)ds} \exp\left[n^{1/3}\left(-\theta_t f_t + \int_0^t \dot{\theta}_s f_s + \frac{A}{2^{1/3}}\left(\dot{\theta}_s \sigma_s\right)^{2/3} ds\right)\right].$$

La solution de l'équation différentielle

$$\theta_t y_t = \int_0^t \dot{\theta}_s y_s + \frac{A}{2^{1/3}}\left(\dot{\theta}_s \sigma_s\right)^{2/3} ds$$

est $f_t = \int_0^t \frac{A(\dot{\theta}_s \sigma_s)^{2/3}}{2^{1/3}\theta_s} ds$.

Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|x|=nt} \mathbf{1}_{\left\{V(x_j)\leq n\int_0^{j/n} a_s ds + n^{1/3} f_{j/n}\right\}} \mathbf{1}_{\left\{V(x)\geq n\int_0^t a_s ds + n^{1/3} f(t)\right\}}\right]$$
$$\approx e^{-n\int_0^t \kappa_s^*(a_s)ds}\, \mathbb{E}\left[e^{-\theta_t \widetilde{S}_{nt} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{nt} \dot{\theta}_{j/n}\widetilde{S}_j} \mathbf{1}_{\left\{\widetilde{S}_j \leq n^{1/3} f_{j/n}\right\}} \mathbf{1}_{\left\{S_{nt}\geq n^{1/3} f_t\right\}}\right]$$
$$\approx e^{-n\int_0^t \kappa_s^*(a_s)ds} \exp\left[n^{1/3}\left(-\theta_t f_t + \int_0^t \dot{\theta}_s f_s + \frac{A}{2^{1/3}}\left(\dot{\theta}_s \sigma_s\right)^{2/3} ds\right)\right].$$

La solution de l'équation différentielle

$$\theta_t y_t = \int_0^t \dot{\theta}_s y_s + \frac{A}{2^{1/3}}\left(\dot{\theta}_s\sigma_s\right)^{2/3} ds$$

est $f_t = \int_0^t \frac{A(\dot{\theta}_s\sigma_s)^{2/3}}{2^{1/3}\theta_s} ds$.

Tous pour un, un pour tous

Merci de votre attention