Localité de la percolation sur les graphes abéliens

Sébastien Martineau,
en thèse à l'ENS Lyon sous la direction de Vincent Beffara

Le théorème présenté aujourd'hui a été obtenu en collaboration avec Vincent Tassion.

Question

L'eau s'infiltre-t-elle en profondeur dans la pierre ?

Deux solutions

1. Briser la pierre.

Deux solutions

1. Briser la pierre.
2. Faire de la mécanique statistique.

Deux solutions

1. ~~Briser la pierre~~.
2. Faire de la mécanique statistique.

La méthode « mécanique statistique »

1. Mesurer un ou deux paramètres macroscopiques de notre objet.

La méthode « mécanique statistique »

1. Mesurer un ou deux paramètres macroscopiques de notre objet.
2. Définir un modèle aléatoire de notre objet où ces paramètres sont imposés.

La méthode « mécanique statistique »

1. Mesurer un ou deux paramètres macroscopiques de notre objet.
2. Définir un modèle aléatoire de notre objet où ces paramètres sont imposés.
3. Espérer que la théorie ne donne pas une réponse aléatoire mais (presque) déterministe.

Appliquons cela à notre pierre.

1. On mesure la porosité p de la pierre, à savoir sa proportion de trous.

Appliquons cela à notre pierre.

1. On mesure la porosité p de la pierre, à savoir sa proportion de trous.
2. On définit un modèle aléatoire de pierre de porosité p.

Percolation

- Paramètre : $p \in [0, 1]$.
- On part d'un réseau cubique.
- Chaque arête est conservée avec probabilité p et effacée avec probabilité $1 - p$, et ce indépendamment les unes des autres.

Illustration en dimension 2

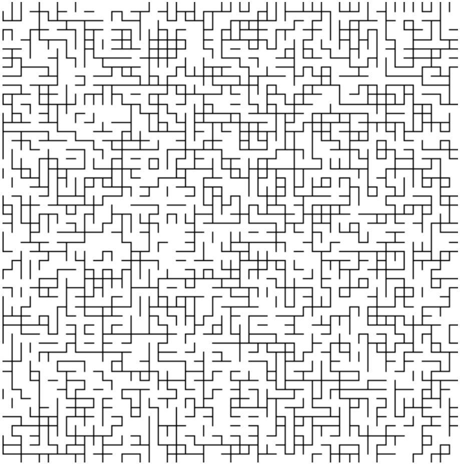

Illustration due à Erzbischof (dimension 2, $p = 0.51$)

Lien avec le problème initial

- Les arêtes représentent les trous.
- La question est celle de l'existence d'un chemin infini.

Transition de phase

Théorème

Il existe un unique nombre $p_c(\mathbb{Z}^3) \in [0,1]$ *tel que*

- *pour tout* $p < p_c(\mathbb{Z}^3)$*, il n'y a presque sûrement pas de chemin infini pour le modèle de paramètre* p*,*
- *pour tout* $p > p_c(\mathbb{Z}^3)$*, il y a presque sûrement un chemin infini.*

Appliquons la méthode à notre cas.

1. On mesure la porosité p de la pierre, à savoir sa proportion de trous.
2. On définit un modèle aléatoire de pierre de porosité p.
3. A p fixé, la réponse est presque déterministe.

Et si on faisait ça sur des groupes abéliens ?

Exemples de groupes abéliens

- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Un produit de groupes abéliens est un groupe abélien.

On n'a rien oublié.

Théorème

Tout groupe abélien de type fini (c'est-à-dire admettant une partie génératrice finie) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}/n_d\mathbb{Z}.$$

Graphes de Cayley, ou graphes abéliens

Soit G un groupe abélien de type fini.

Soit S une partie génératrice finie de G.

On définit notre graphe comme suit :

- un sommet est un élément x de notre groupe ;
- on relie x à $x + s$ dès que $s \in S$.

Remarque

Le graphe abstrait est bien défini, mais rien n'indique « comment il faut le dessiner ».

Transition de phase

Théorème

Etant donné un graphe $\mathcal{G}$*, il existe un unique nombre* $p_c(\mathcal{G}) \in [0,1]$ *tel que*

- *pour tout* $p < p_c(\mathcal{G})$*, il n'y a presque sûrement pas de chemin infini pour le modèle de paramètre* p*,*
- *pour tout* $p > p_c(\mathcal{G})$*, il y a presque sûrement un chemin infini.*

Localité de la percolation sur les graphes abéliens

On aimerait dire que la valeur de $p_c(\mathcal{G})$ dépend surtout de la structure locale du graphe abélien considéré.

Topologie de Benjamini-Schramm

Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux graphes abéliens.

On considère le plus grand n tel que $B_{\mathcal{G}}(0, n)$ et $B_{\mathcal{H}}(0, n)$ soient isomorphes.

On pose $d(\mathcal{G}, \mathcal{H}) := 2^{-n}$.

Topologie de Benjamini-Schramm

On définit ainsi une distance sur l'espace des classes d'isomorphismes de graphes abéliens.

Localité de la percolation sur les graphes abéliens

On aimerait dire que si une suite $(\mathcal{G}_n)$ de graphes abéliens converge vers $\mathcal{G}$, alors $p_c(\mathcal{G}_n)$ converge vers $p_c(\mathcal{G})$.

Localité de la percolation sur les graphes abéliens

On aimerait dire que si une suite $(\mathcal{G}_n)$ de graphes abéliens converge vers $\mathcal{G}$, alors $p_c(\mathcal{G}_n)$ converge vers $p_c(\mathcal{G})$.

C'est faux.

Vraies transitions de phase

Théorème

Soit $\mathcal{G}$ un graphe abélien.

- *Si $\mathcal{G}$ est de dimension 0 ou 1, alors $p_c(\mathcal{G}) = 1$.*
- *Si $\mathcal{G}$ est de dimension 2 ou plus, alors $0 < p_c(\mathcal{G}) < 1$.*

Illustration en dimension 2

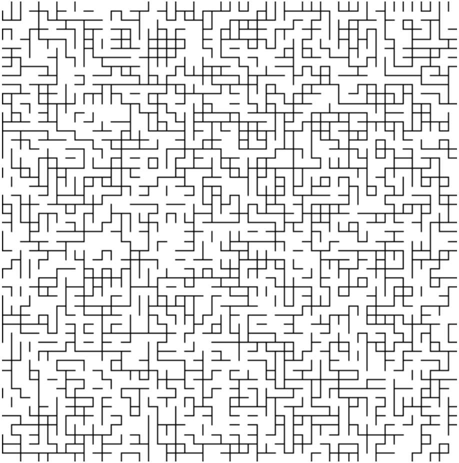

Illustration due à Erzbischof (dimension 2, $p = 0.51$)

Un contre-exemple

$$\mathcal{G}_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$$

$$\mathcal{G} = \text{ le réseau carré}$$

La suite $(\mathcal{G}_n)$ converge vers $\mathcal{G}$.

Pourtant, $p_c(\mathcal{G}_n) = 1 \neq p_c(\mathcal{G})$.

Localité de la percolation sur les graphes abéliens

Théorème (M. et Tassion)

Si $(\mathcal{G}_n)$ est une suite de graphes abéliens de dimension au moins 2 qui converge vers un certain $\mathcal{G}$, alors $p_c(\mathcal{G}_n)$ converge vers $p_c(\mathcal{G})$.

Quoi de neuf, docteur ?

Le cas où le système de générateurs jouit de bonnes propriétés de symétrie est connu de "longue date" (Grimmett et Marstrand, 1990).

Notre preuve s'inspire de la leur mais de nouvelles idées étaient nécessaires pour gérer l'anisotropie.

Quoi de neuf, docteur ?

Autre nouveauté, l'introduction en mécanique statistique d'un outil de théorie des groupes : l'espace des groupes marqués.

Cet outil améliore la qualité des convergences de graphes considérées.

Je vous remercie.

- I. Benjamini, A. Nachmias et Y. Peres, *Is critical percolation local ?*, Probability Theory and Related Fields, vol. 149, p. 261-269, 2011.
- I. Benjamini et O. Schramm, *Recurrence of distributional limits of finite planar graphs*, Electronic Journal of Probability, vol. 6, p. 1-13, 2001.
- G. R. Grimmett et J. M. Marstrand, *The supercritical phase of percolation is well behaved*, Proceedings: Mathematical and Physical Sciences, vol. 430 (No 1879), p. 439-457, 1990.
- S. M. et Vincent Tassion, *Locality of percolation for abelian Cayley graphs*, arXiv:1312.1946.