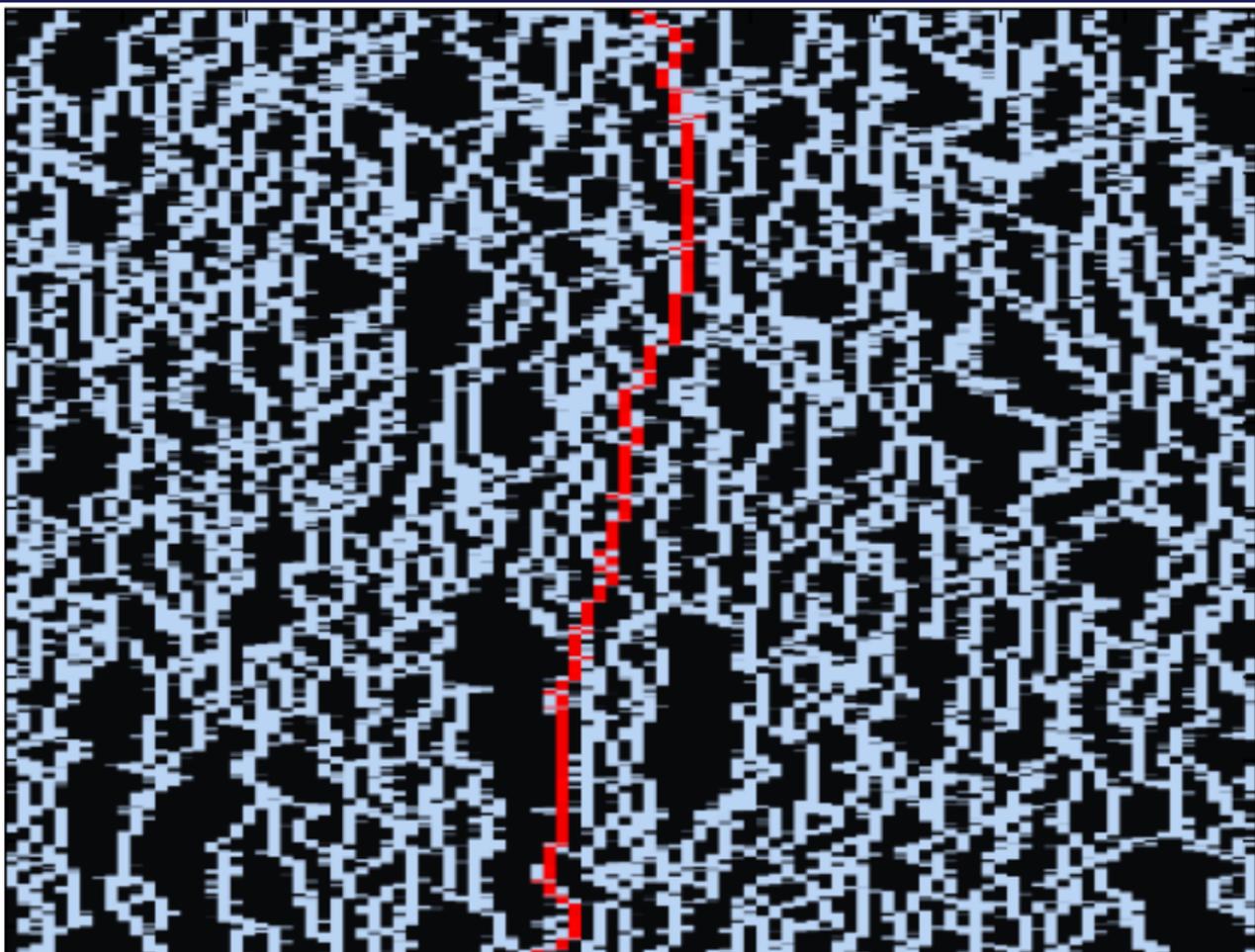


Diffusion d'un traceur dans le modèle FA-1f

Oriane Blondel
LPMA – Paris 7; ENS Paris

JPS 2014 – Forges-les-Eaux
10 avril 2014



Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des (2d) plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.



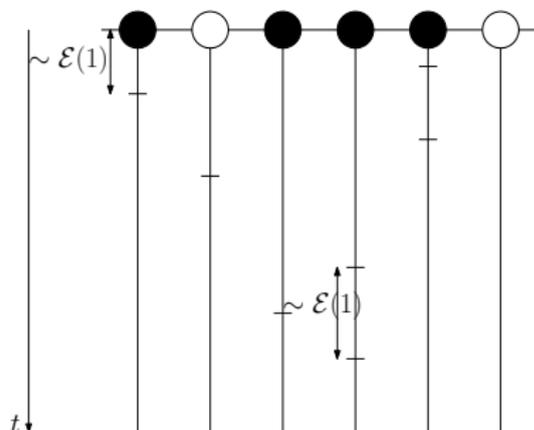
- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

$t \downarrow$

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des $(2d)$ plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

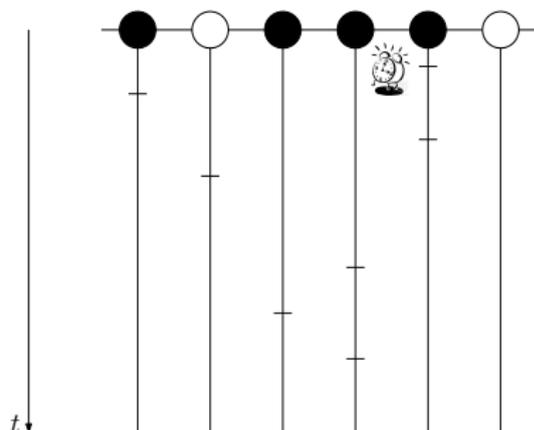


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des $(2d)$ plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

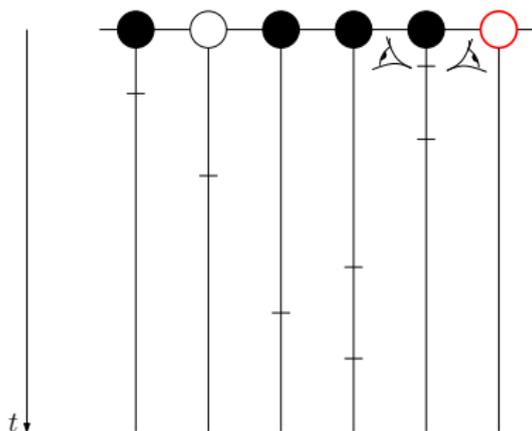


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on le laisse vide avec proba $q = 1 - p$.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des ($2d$) plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

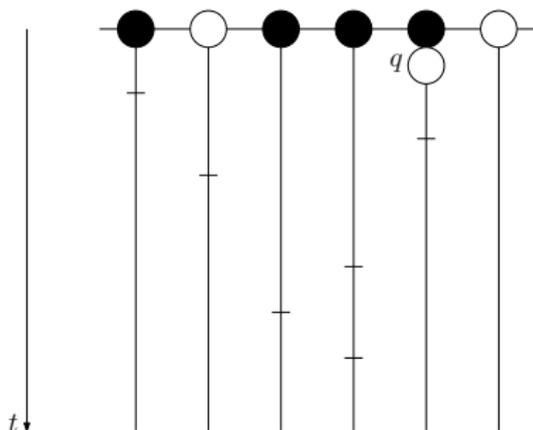


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on le laisse vide avec proba $q = 1 - p$.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des $(2d)$ plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

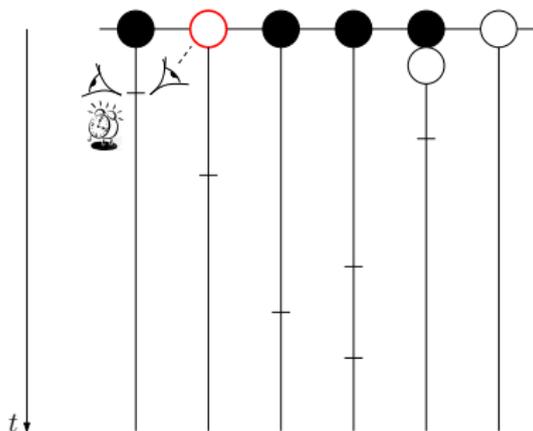


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on la laisse vide avec proba $q = 1 - p$.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des $(2d)$ plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

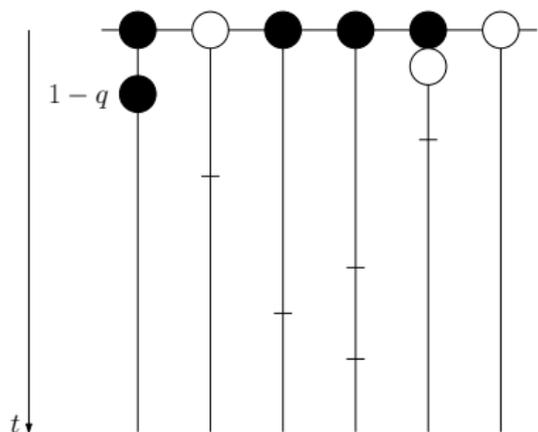


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on le laisse vide avec proba $q = 1 - p$.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des $(2d)$ plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

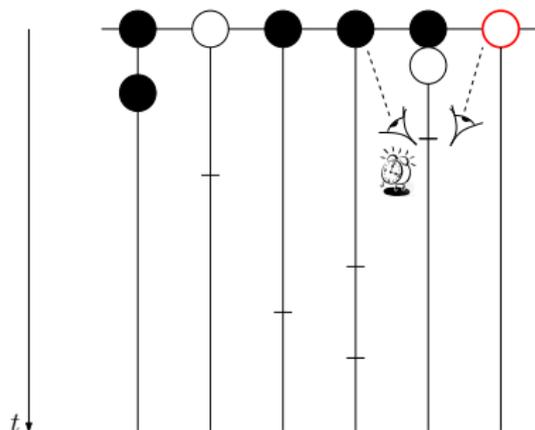


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on la laisse vide avec proba $q = 1 - p$.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des $(2d)$ plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

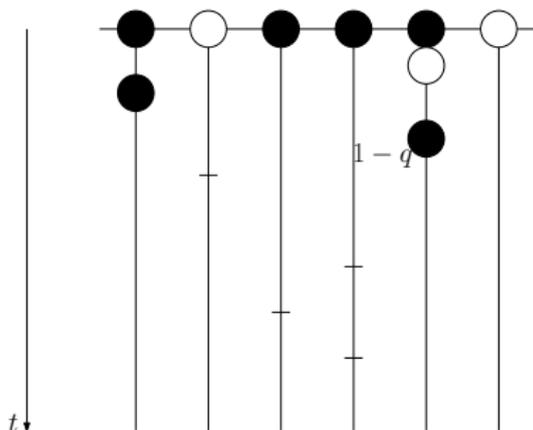


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on la laisse vide avec proba $q = 1 - p$.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des $(2d)$ plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

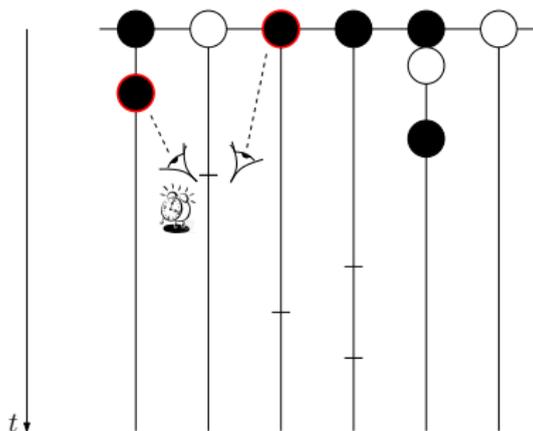


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on la laisse vide avec proba $q = 1 - p$.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des ($2d$) plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

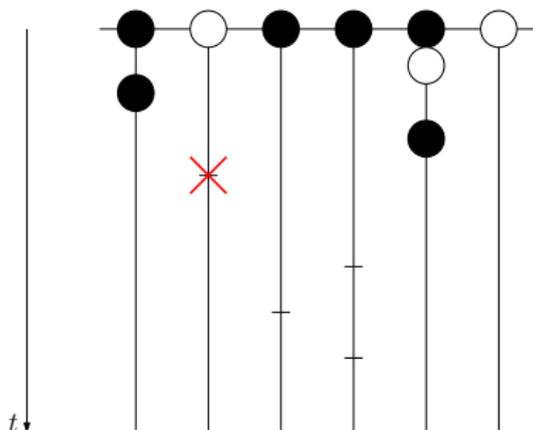


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on le laisse vide avec proba $q = 1 - p$.
- ▶ Si la contrainte n'est pas satisfaite, on ne fait rien.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des ($2d$) plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

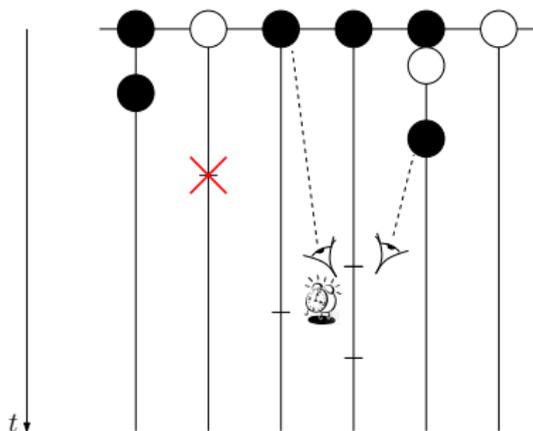


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on le laisse vide avec proba $q = 1 - p$.
- ▶ Si la contrainte n'est pas satisfaite, on ne fait rien.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des $(2d)$ plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

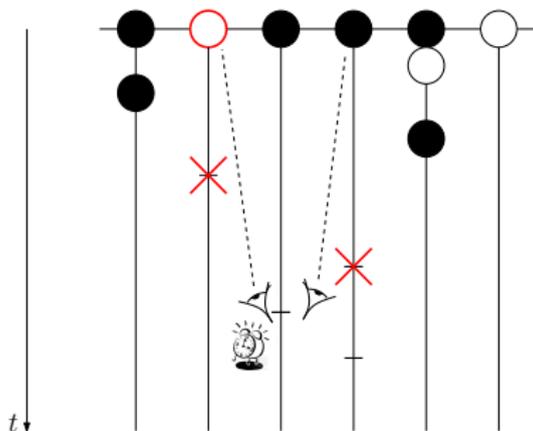


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on le laisse vide avec proba $q = 1 - p$.
- ▶ Si la contrainte n'est pas satisfaite, on ne fait rien.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des ($2d$) plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

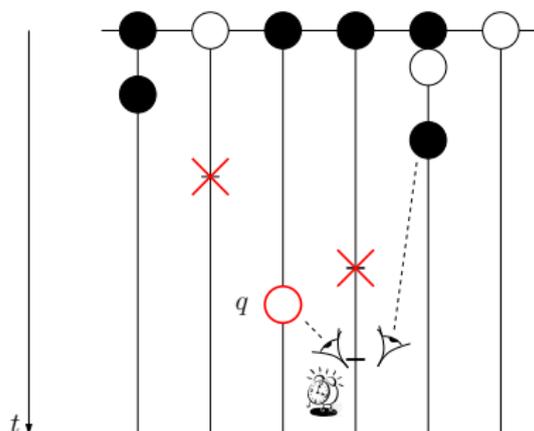


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on le laisse vide avec proba $q = 1 - p$.
- ▶ Si la contrainte n'est pas satisfaite, on ne fait rien.

Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0,1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des $(2d)$ plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.

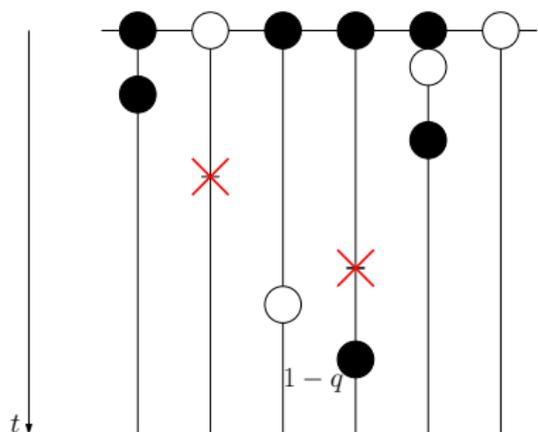


- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on le laisse vide avec proba $q = 1 - p$.
- ▶ Si la contrainte n'est pas satisfaite, on ne fait rien.

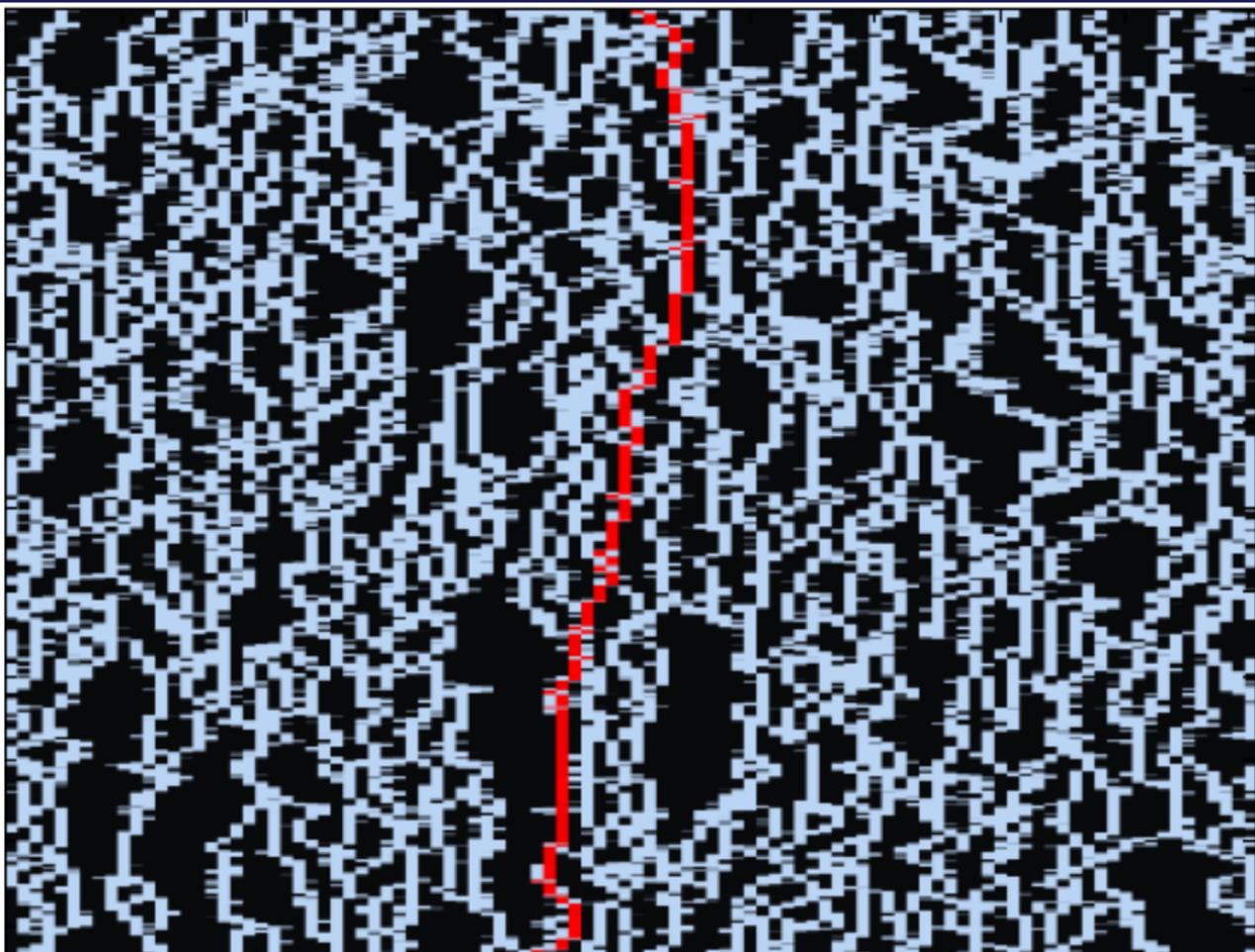
Le modèle "one spin – facilitated" de Fredrickson-Andersen

Introduit en physique pour modéliser les systèmes vitreux.

- ▶ Processus de Markov sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ avec dynamique de création/destruction de particules.
- ▶ $p \in (0, 1)$ paramètre de densité. $q := 1 - p$ (q petit \leftrightarrow basse température).
- ▶ Contrainte : on ne peut ajouter/enlever une particule en x que si un des $(2d)$ plus proches voisins est vide. $c_x(\omega) = 1 - \prod_{y \sim x} \omega_y$.



- ▶ Configuration initiale $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$.
- ▶ Chaque site x attend pendant un temps exponentiel de paramètre 1.
- ▶ Puis, *si la contrainte est satisfaite*, on met à jour x : on y place une particule avec probabilité p et on le laisse vide avec proba $q = 1 - p$.
- ▶ Si la contrainte n'est pas satisfaite, on ne fait rien.



Equilibre

► Notons $P_t f(\omega) = \mathbb{E}_\omega [f(\omega(t))]$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(\omega) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} c_x(\omega) ((1-q)(1-\omega_x) + q\omega_x) [f(\omega^x) - f(\omega)] \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} c_x(\omega) r_x(\omega) [f(\omega^x) - f(\omega)]\end{aligned}$$

Equilibre

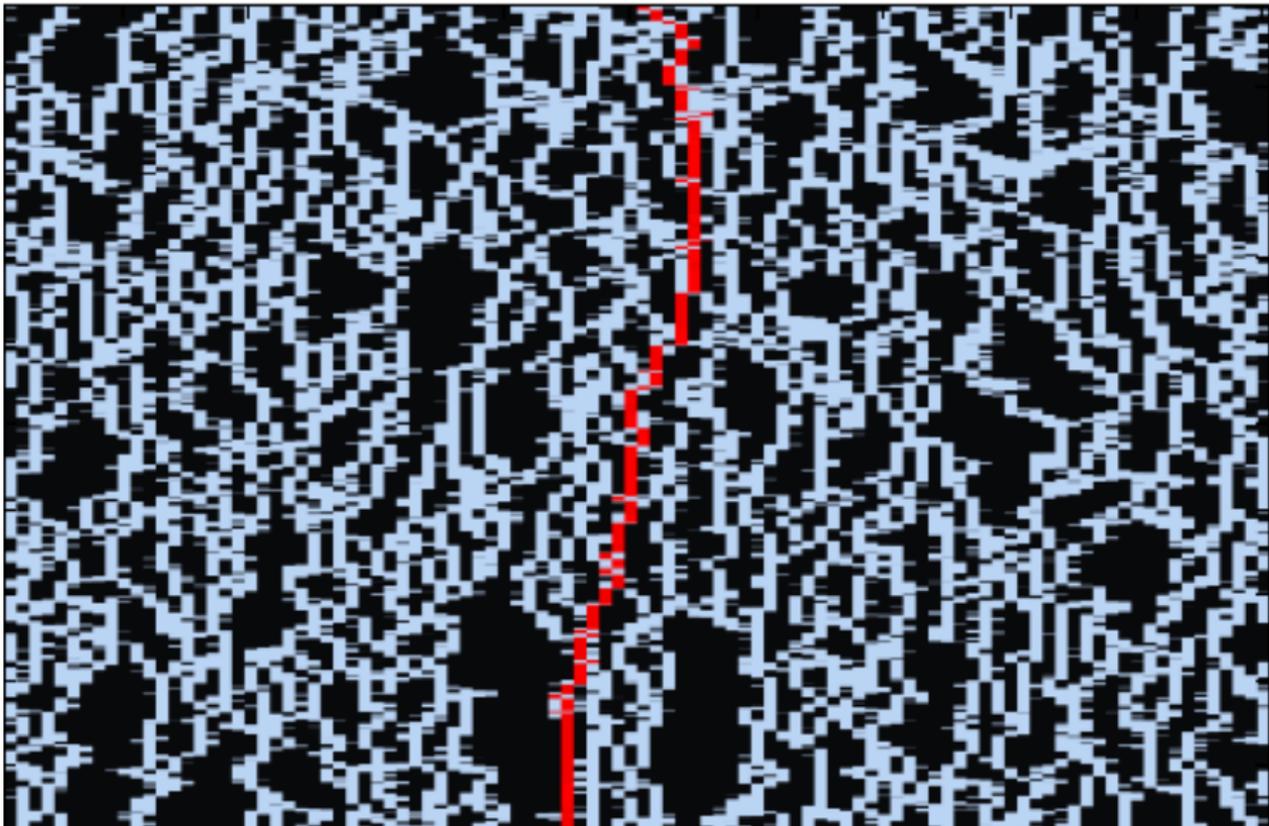
► Notons $P_t f(\omega) = \mathbb{E}_\omega [f(\omega(t))]$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(\omega) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} c_x(\omega) ((1-q)(1-\omega_x) + q\omega_x) [f(\omega^x) - f(\omega)] \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} c_x(\omega) r_x(\omega) [f(\omega^x) - f(\omega)] \end{aligned}$$

► Soit $\mu = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ la mesure produit de densité $1-q$ sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. μ est réversible pour la dynamique FA-1f \implies mesure d'équilibre.

Sondons les bulles

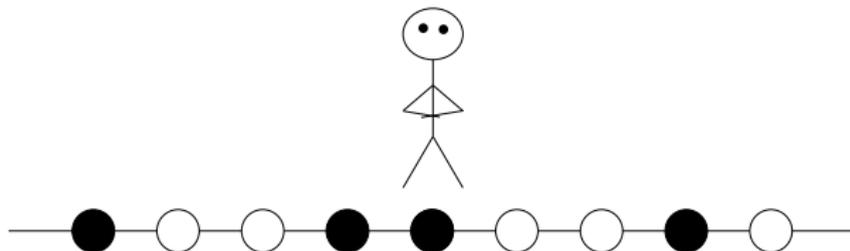


Sondons les bulles

Version macroscopique : expérience de Brown \rightarrow mouvement brownien = mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide. Coefficient de diffusion dépend du liquide.

Version microscopique : cadre de [Jung-Garrahan-Chandler '04].

- ▶ Environnement : dynamique FA-1f à l'équilibre (configuration initiale $\sim \mu$).
- ▶ On ajoute un traceur (ou particule-sonde) à l'origine.

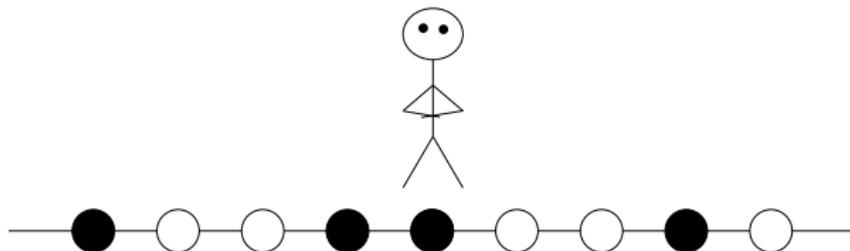


Sondons les bulles

Version macroscopique : expérience de Brown \rightarrow mouvement brownien = mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide. Coefficient de diffusion dépend du liquide.

Version microscopique : cadre de [Jung-Garrahan-Chandler '04].

- ▶ Environnement : dynamique FA-1f à l'équilibre (configuration initiale $\sim \mu$).
- ▶ On ajoute un traceur (ou particule-sonde) à l'origine.
- ▶ Il suit une marche aléatoire, mais n'est autorisé à sauter qu'entre deux sites vides.

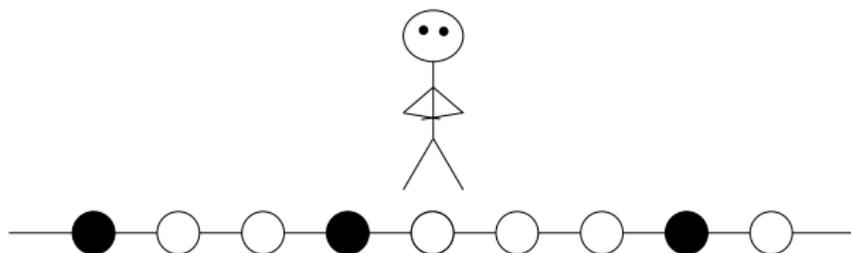


Sondons les bulles

Version macroscopique : expérience de Brown \rightarrow mouvement brownien = mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide. Coefficient de diffusion dépend du liquide.

Version microscopique : cadre de [Jung-Garrahan-Chandler '04].

- ▶ Environnement : dynamique FA-1f à l'équilibre (configuration initiale $\sim \mu$).
- ▶ On ajoute un traceur (ou particule-sonde) à l'origine.
- ▶ Il suit une marche aléatoire, mais n'est autorisé à sauter qu'entre deux sites vides.

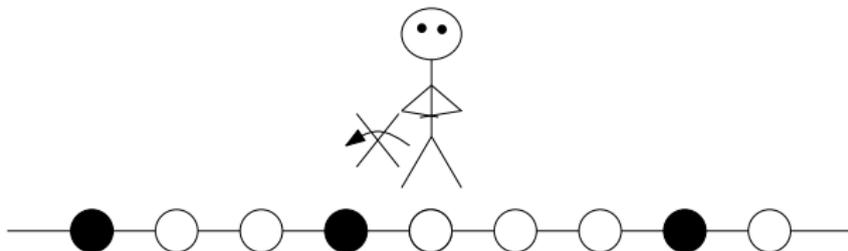


Sondons les bulles

Version macroscopique : expérience de Brown \rightarrow mouvement brownien = mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide. Coefficient de diffusion dépend du liquide.

Version microscopique : cadre de [Jung-Garrahan-Chandler '04].

- ▶ Environnement : dynamique FA-1f à l'équilibre (configuration initiale $\sim \mu$).
- ▶ On ajoute un traceur (ou particule-sonde) à l'origine.
- ▶ Il suit une marche aléatoire, mais n'est autorisé à sauter qu'entre deux sites vides.

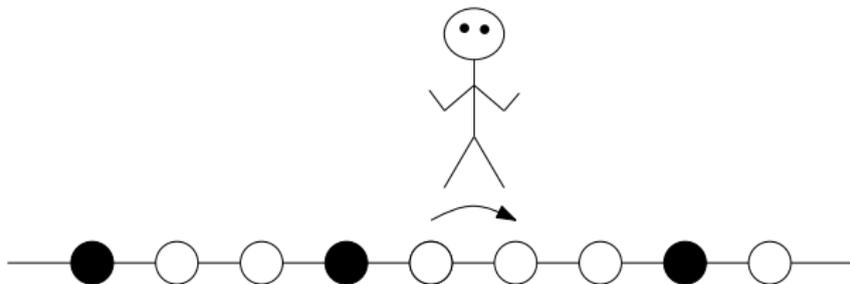


Sondons les bulles

Version macroscopique : expérience de Brown \rightarrow mouvement brownien = mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide. Coefficient de diffusion dépend du liquide.

Version microscopique : cadre de [Jung-Garrahan-Chandler '04].

- ▶ Environnement : dynamique FA-1f à l'équilibre (configuration initiale $\sim \mu$).
- ▶ On ajoute un traceur (ou particule-sonde) à l'origine.
- ▶ Il suit une marche aléatoire, mais n'est autorisé à sauter qu'entre deux sites vides.

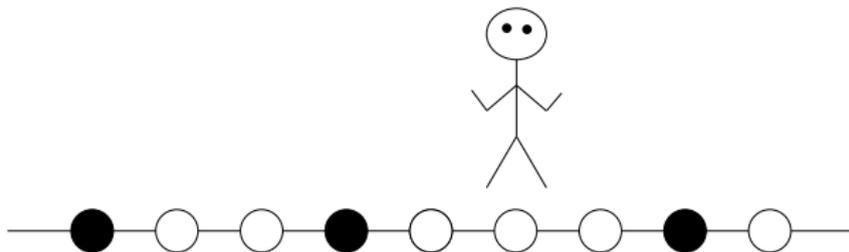


Sondons les bulles

Version macroscopique : expérience de Brown \rightarrow mouvement brownien = mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide. Coefficient de diffusion dépend du liquide.

Version microscopique : cadre de [Jung-Garrahan-Chandler '04].

- ▶ Environnement : dynamique FA-1f à l'équilibre (configuration initiale $\sim \mu$).
- ▶ On ajoute un traceur (ou particule-sonde) à l'origine.
- ▶ Il suit une marche aléatoire, mais n'est autorisé à sauter qu'entre deux sites vides.

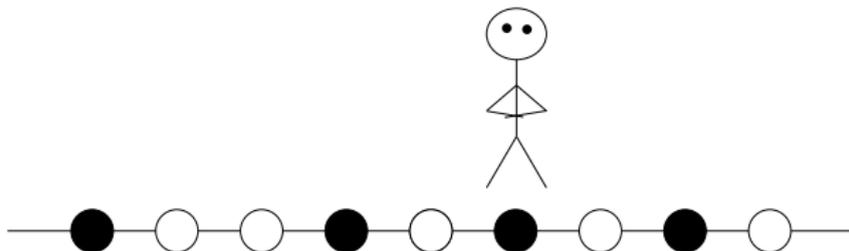


Sondons les bulles

Version macroscopique : expérience de Brown \rightarrow mouvement brownien = mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide. Coefficient de diffusion dépend du liquide.

Version microscopique : cadre de [Jung-Garrahan-Chandler '04].

- ▶ Environnement : dynamique FA-1f à l'équilibre (configuration initiale $\sim \mu$).
- ▶ On ajoute un traceur (ou particule-sonde) à l'origine.
- ▶ Il suit une marche aléatoire, mais n'est autorisé à sauter qu'entre deux sites vides.

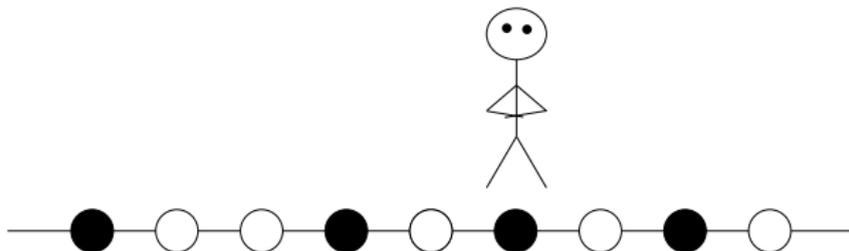


Sondons les bulles

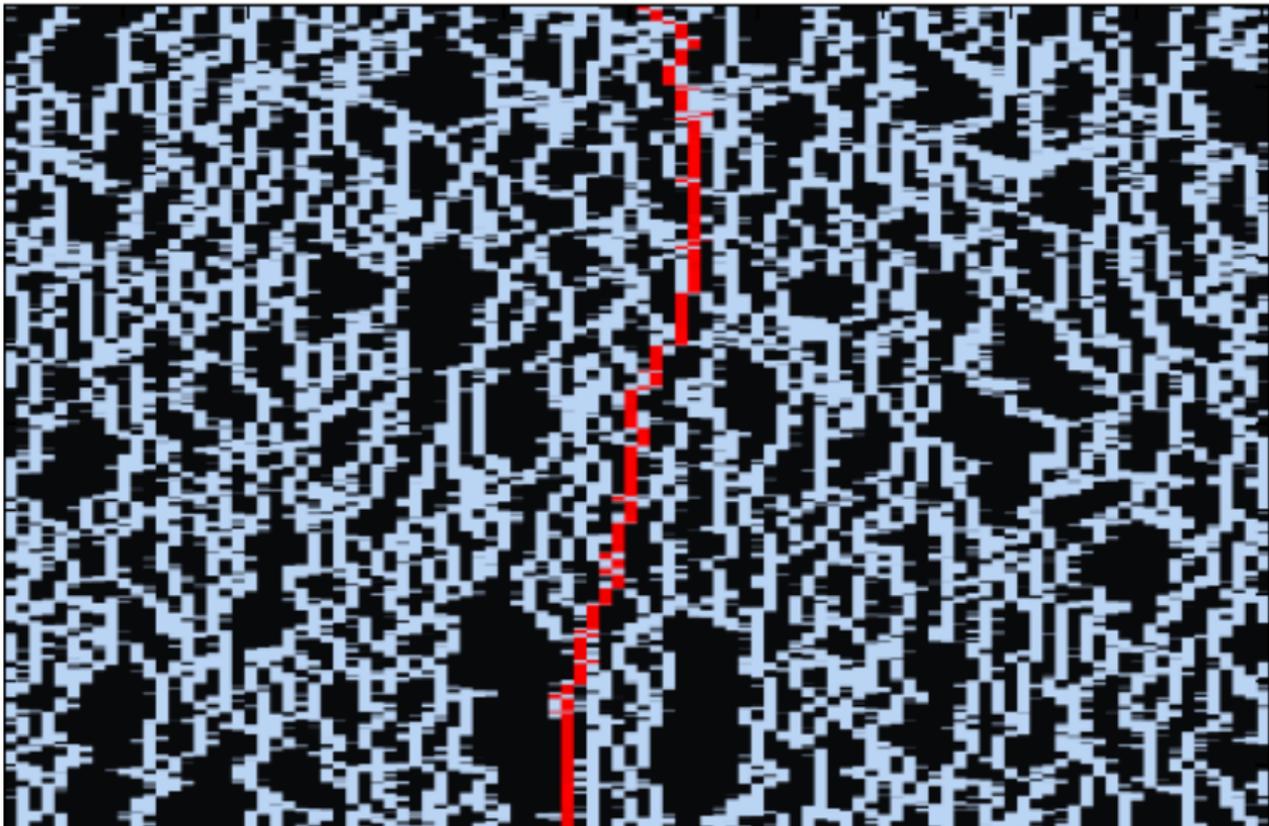
Version macroscopique : expérience de Brown \rightarrow mouvement brownien = mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide. Coefficient de diffusion dépend du liquide.

Version microscopique : cadre de [Jung-Garrahan-Chandler '04].

- ▶ Environnement : dynamique FA-1f à l'équilibre (configuration initiale $\sim \mu$).
- ▶ On ajoute un traceur (ou particule-sonde) à l'origine.
- ▶ Il suit une marche aléatoire, mais n'est autorisé à sauter qu'entre deux sites vides.
- ▶ Le processus vu du traceur est encore réversible par rapport à μ .



Sondons les bulles



Coefficient de diffusion

Bien renormalisée, la trajectoire du traceur converge vers un mouvement brownien.

X_t : position du traceur au temps t .

$$\epsilon X_{\epsilon^{-2}t} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{2D \cdot I_d} B_t,$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

NB :

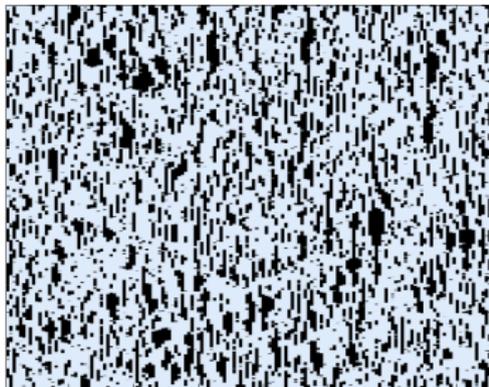
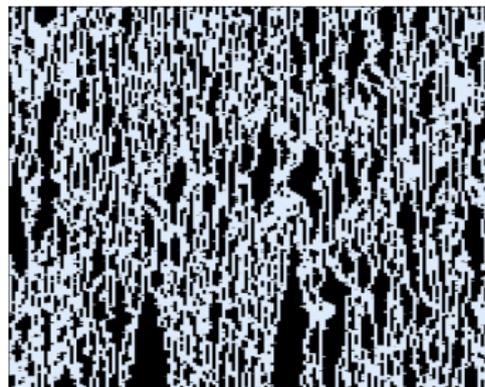
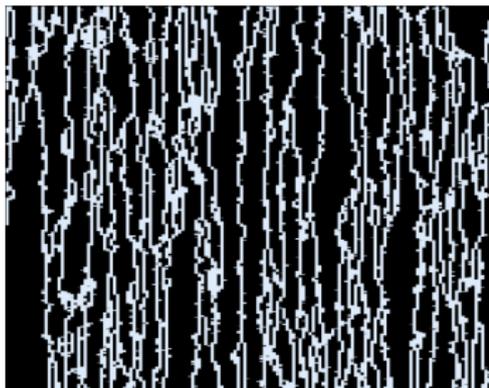
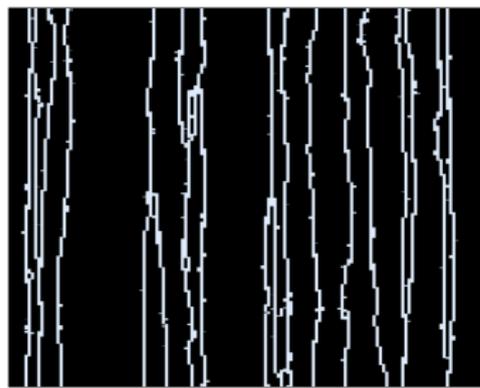
- ▶ Interaction avec l'environnement encodée dans le *coefficient de diffusion* D .
- ▶ $D = D(q)$.

Formule variationnelle pour D

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu \left(c_x(\eta) r_x(\eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{y \sim 0} \mu \left((1 - \eta_0)(1 - \eta_y) [y_1 + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\} \\
 &> 0,
 \end{aligned}$$

où l'infimum est pris sur les fonctions locales f sur Ω .

N.B.: $D \leq q^2$.

 $p = 0.3$  $p = 0.5$  $p = 0.7$  $p = 0.9$

Dépendance de D en q , $q \rightarrow 0$

Théorème (B. '13)

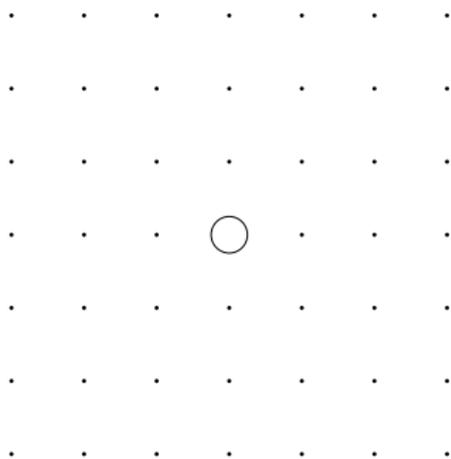
Il existe $c > 0$ ne dépendant pas de q tel que

$$cq^2 \leq D \leq q^2.$$

N.B.: Si on remplace la contrainte par "il faut au moins k zéros dans une boule de rayon k (en norme 1)", on a des bornes en q^{k+1} .

Heuristique 1 – FA-1f à basse température

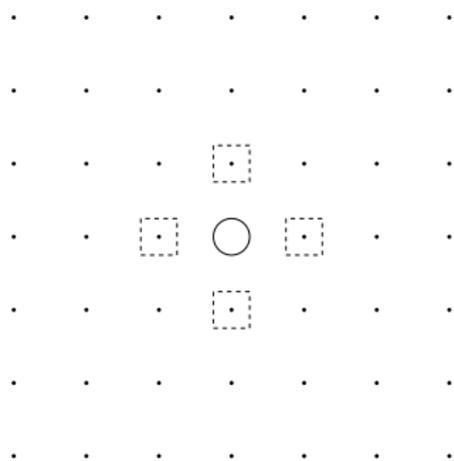
- ▶ Si q petit, sous $\mu = \mathcal{B}(1 - q)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ il y a typiquement un zéro (isolé) dans chaque boîte de volume $1/q$.
- ▶ Considérons un zéro isolé dans une mer de particules.



Heuristique 1 – FA-1f à basse température

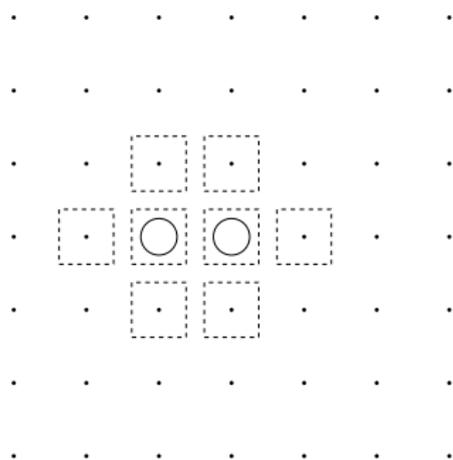
- ▶ Si q petit, sous $\mu = \mathcal{B}(1 - q)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ il y a typiquement un zéro (isolé) dans chaque boîte de volume $1/q$.
- ▶ Considérons un zéro isolé dans une mer de particules.

1. Contrainte satisfaite en quatre points.



Heuristique 1 – FA-1f à basse température

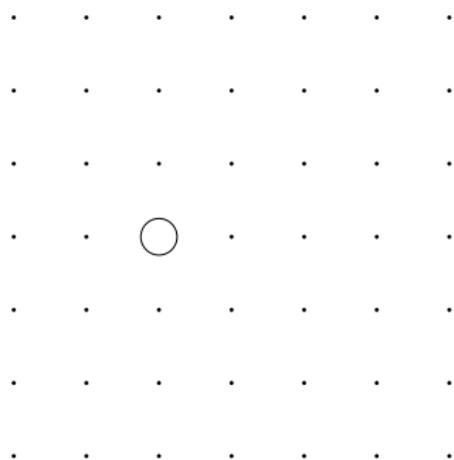
- ▶ Si q petit, sous $\mu = \mathcal{B}(1 - q)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ il y a typiquement un zéro (isolé) dans chaque boîte de volume $1/q$.
- ▶ Considérons un zéro isolé dans une mer de particules.



1. Contrainte satisfaite en quatre points.
2. En temps $1/q$, on enlève une des quatre particules.
3. La contrainte est maintenant satisfaite (en particulier) sur les deux zéros.

Heuristique 1 – FA-1f à basse température

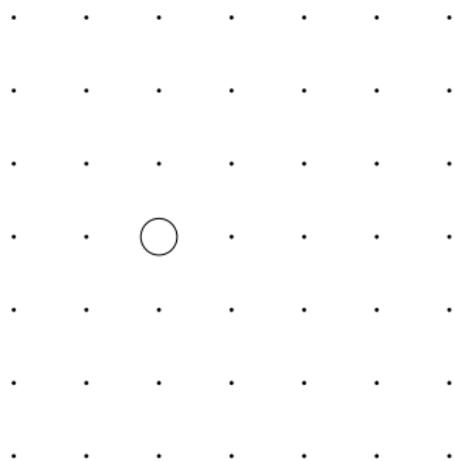
- ▶ Si q petit, sous $\mu = \mathcal{B}(1 - q)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ il y a typiquement un zéro (isolé) dans chaque boîte de volume $1/q$.
- ▶ Considérons un zéro isolé dans une mer de particules.



1. Contrainte satisfaite en quatre points.
2. En temps $1/q$, on enlève une des quatre particules.
3. La contrainte est maintenant satisfaite (en particulier) sur les deux zéros.
4. En temps 1, on remet une particule sur l'un des zéros.

Heuristique 1 – FA-1f à basse température

- ▶ Si q petit, sous $\mu = \mathcal{B}(1 - q)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ il y a typiquement un zéro (isolé) dans chaque boîte de volume $1/q$.
- ▶ Considérons un zéro isolé dans une mer de particules.



1. Contrainte satisfaite en quatre points.
2. En temps $1/q$, on enlève une des quatre particules.
3. La contrainte est maintenant satisfaite (en particulier) sur les deux zéros.
4. En temps 1, on remet une particule sur l'un des zéros.

Bilan : un saut de marche aléatoire simple en temps $1/q$.

Heuristique 2 – Environnement vu du traceur

- ▶ On fixe le traceur à l'origine et au lieu de le faire sauter, on translate la configuration \implies processus de *l'environnement vu du traceur*.

Heuristique 2 – Environnement vu du traceur

- ▶ On fixe le traceur à l'origine et au lieu de le faire sauter, on translate la configuration \implies processus de *l'environnement vu du traceur*.
- ▶ Tant que le traceur ne bouge pas, l'environnement qu'il voit est le modèle FA-1f.

Heuristique 2 – Environnement vu du traceur

- ▶ On fixe le traceur à l'origine et au lieu de le faire sauter, on translate la configuration \implies processus de *l'environnement vu du traceur*.
- ▶ Tant que le traceur ne bouge pas, l'environnement qu'il voit est le modèle FA-1f.
- ▶ Le traceur ne peut sauter que s'il y a un zéro en l'origine.

Heuristique 2 – Environnement vu du traceur

- ▶ On fixe le traceur à l'origine et au lieu de le faire sauter, on translate la configuration \implies processus de *l'environnement vu du traceur*.
- ▶ Tant que le traceur ne bouge pas, l'environnement qu'il voit est le modèle FA-1f.
- ▶ Le traceur ne peut sauter que s'il y a un zéro en l'origine.

A basse température :

- ▶ On se place sur le tore de volume $1/q$.

Heuristique 2 – Environnement vu du traceur

- ▶ On fixe le traceur à l'origine et au lieu de le faire sauter, on translate la configuration \implies processus de *l'environnement vu du traceur*.
- ▶ Tant que le traceur ne bouge pas, l'environnement qu'il voit est le modèle FA-1f.
- ▶ Le traceur ne peut sauter que s'il y a un zéro en l'origine.

A basse température :

- ▶ On se place sur le tore de volume $1/q$.
- ▶ Une marche aléatoire simple passe une proportion de temps $\approx q$ en l'origine.
- ▶ Pendant ce temps, le traceur diffuse avec le zéro \implies à taux q .

Heuristique 2 – Environnement vu du traceur

- ▶ On fixe le traceur à l'origine et au lieu de le faire sauter, on translate la configuration \implies processus de *l'environnement vu du traceur*.
- ▶ Tant que le traceur ne bouge pas, l'environnement qu'il voit est le modèle FA-1f.
- ▶ Le traceur ne peut sauter que s'il y a un zéro en l'origine.

A basse température :

- ▶ On se place sur le tore de volume $1/q$.
- ▶ Une marche aléatoire simple passe une proportion de temps $\approx q$ en l'origine.
- ▶ Pendant ce temps, le traceur diffuse avec le zéro \implies à taux q .
- ▶

$$q \times q = q^2 !$$

Et une preuve ?

$$D = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu \left(c_x(\eta) r_x(\eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]^2 \right) + \sum_{y \sim 0} \mu \left((1 - \eta_0)(1 - \eta_y) [y_1 + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\}$$

Environnement FA-1f en dimension d .

Sauts du traceur en dimension d .

Et une preuve ?

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu \left(c_x(\eta) r_x(\eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{y \sim 0} \mu \left((1 - \eta_0)(1 - \eta_y) [y_1 + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\} \\
 &\geq \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \sum_{x \in \mathbb{Z} \cdot \mathbf{e}_1} \mu \left(c_x^{\mathbb{Z}}(\eta) r_x(\eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{y = \pm \mathbf{e}_1} \mu \left((1 - \eta_0)(1 - \eta_y) [y_1 + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Environnement FA-1f en dimension 1.

Sauts du traceur dans la direction 1.

Et une preuve ?

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu \left(c_x(\eta) r_x(\eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{y \sim 0} \mu \left((1 - \eta_0)(1 - \eta_y) [y_1 + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\} \\
 &\geq \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \sum_{x \in \mathbb{Z} \cdot \mathbf{e}_1} \mu \left(c_x^{\mathbb{Z}}(\eta) r_x(\eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{y = \pm \mathbf{e}_1} \mu \left((1 - \eta_0)(1 - \eta_y) [y_1 + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Environnement FA-1f en dimension 1.

Sauts du traceur dans la direction 1.

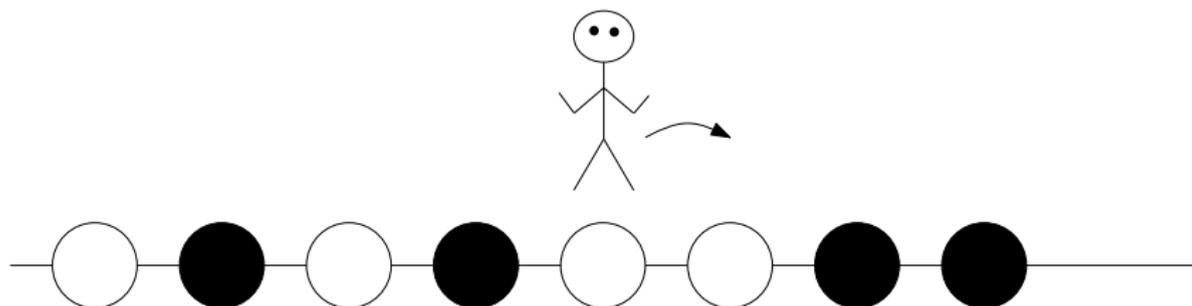
\implies On se contente d'étudier la dimension 1.

Dynamique auxiliaire (en dimension 1)

Environnement : On échange à taux 1 les sites à droite et à gauche du traceur.

Traceur : Saute à gauche/droite à taux 1 si le site est vide.

Equilibre : $\mu^{(0)}(\cdot) = \mu(\cdot | \eta_0 = \eta_1 \eta_{-1} = 0)$.

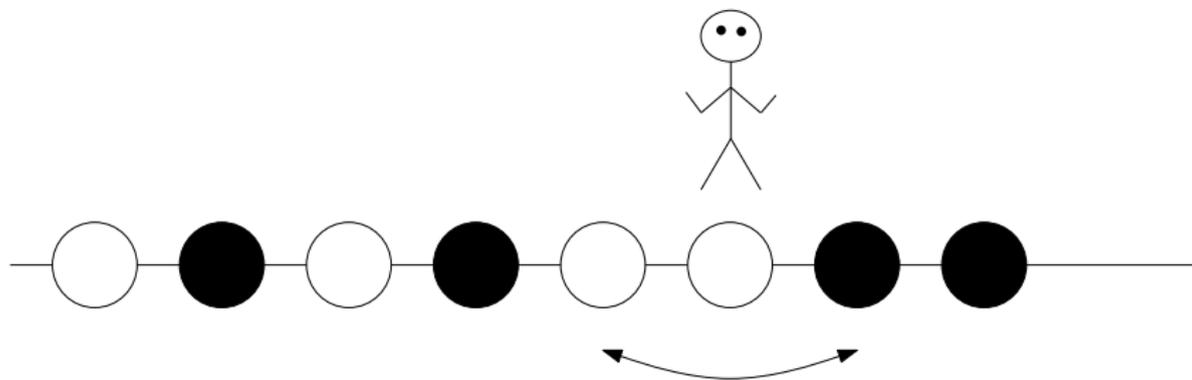


Dynamique auxiliaire (en dimension 1)

Environnement : On échange à taux 1 les sites à droite et à gauche du traceur.

Traceur : Saute à gauche/droite à taux 1 si le site est vide.

Equilibre : $\mu^{(0)}(\cdot) = \mu(\cdot | \eta_0 = \eta_1 \eta_{-1} = 0)$.

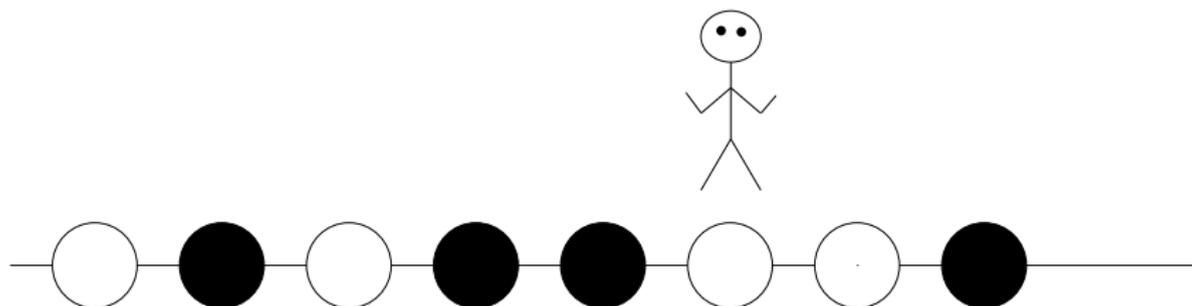


Dynamique auxiliaire (en dimension 1)

Environnement : On échange à taux 1 les sites à droite et à gauche du traceur.

Traceur : Saute à gauche/droite à taux 1 si le site est vide.

Equilibre : $\mu^{(0)}(\cdot) = \mu(\cdot | \eta_0 = \eta_1 \eta_{-1} = 0)$.



Coefficient de diffusion dans la dynamique auxiliaire

Environnement : On échange à taux 1 les sites à droite et à gauche du traceur.

Traceur : Saute à gauche/droite à taux 1 si le site est vide.

Equilibre : $\mu^{(0)}$.

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \mu^{(0)} \left([f(\eta^{\leftrightarrow}) - f(\eta)]^2 \right) + \sum_{y=\pm 1} \mu^{(0)} \left((1 - \eta_y) [y + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\},$$

où

$$\eta_{\pm 1}^{\leftrightarrow} = \eta_{\mp 1} \quad \text{et} \quad \eta_x^{\leftrightarrow} = \eta_x \quad \text{si} \quad x \neq \pm 1.$$

Coefficient de diffusion dans la dynamique auxiliaire

Environnement : On échange à taux 1 les sites à droite et à gauche du traceur.

Traceur : Saute à gauche/droite à taux 1 si le site est vide.

Equilibre : $\mu^{(0)}$.

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \mu^{(0)} \left([f(\eta^{\leftrightarrow}) - f(\eta)]^2 \right) + \sum_{y=\pm 1} \mu^{(0)} \left((1 - \eta_y) [y + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\},$$

où

$$\eta_{\pm 1}^{\leftrightarrow} = \eta_{\mp 1} \quad \text{et} \quad \eta_x^{\leftrightarrow} = \eta_x \quad \text{si} \quad x \neq \pm 1.$$

$$\bar{D} > 0 \quad (\text{et ne dépend pas de } q)$$

Comparaison entre \bar{D} et D

$$D = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mu \left(c_x(\eta) r_x(\eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]^2 \right) + \sum_{y=\pm 1} \mu \left((1 - \eta_0)(1 - \eta_y) [y + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\},$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \mu^{(0)} ([f(\eta^{\leftrightarrow}) - f(\eta)]^2) + \sum_{y=\pm 1} \mu^{(0)} \left((1 - \eta_y) [y + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\}.$$

Comparaison entre \bar{D} et D

$$D = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mu \left(c_x(\eta) r_x(\eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]^2 \right) + \sum_{y=\pm 1} \mu \left((1 - \eta_0)(1 - \eta_y) [y + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\},$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \mu^{(0)} \left([f(\eta^{\leftrightarrow}) - f(\eta)]^2 \right) + \sum_{y=\pm 1} \mu^{(0)} \left((1 - \eta_y) [y + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\}.$$

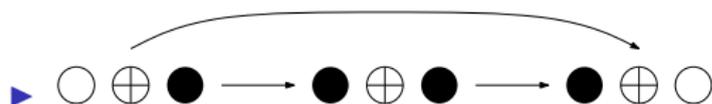
► $\mu^{(0)}(\cdot) = \mu(\cdot | \eta_0 = \eta_1 \eta_{-1} = 0) \implies " \mu \geq q^2 \mu^{(0)} "$.

Comparaison entre \bar{D} et D

$$D = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mu \left(c_x(\eta) r_x(\eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]^2 \right) + \sum_{y=\pm 1} \mu \left((1 - \eta_0)(1 - \eta_y) [y + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\},$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \mu^{(0)} \left([f(\eta^{\leftrightarrow}) - f(\eta)]^2 \right) + \sum_{y=\pm 1} \mu^{(0)} \left((1 - \eta_y) [y + f(\eta_{y+\cdot}) - f(\eta)]^2 \right) \right\}.$$

► $\mu^{(0)}(\cdot) = \mu(\cdot | \eta_0 = \eta_1 \eta_{-1} = 0) \implies " \mu \geq q^2 \mu^{(0)} "$.

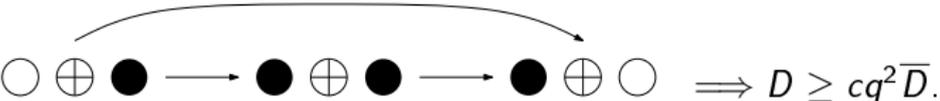


Comparaison entre \bar{D} et D

$$D = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mu \left(c_x(\eta) r_x(\eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]^2 \right) + \sum_{y=\pm 1} \mu \left((1 - \eta_0)(1 - \eta_y) [y + f(\eta_{y+}) - f(\eta)]^2 \right) \right\},$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \inf_f \left\{ \mu^{(0)} \left([f(\eta^{\leftrightarrow}) - f(\eta)]^2 \right) + \sum_{y=\pm 1} \mu^{(0)} \left((1 - \eta_y) [y + f(\eta_{y+}) - f(\eta)]^2 \right) \right\}.$$

► $\mu^{(0)}(\cdot) = \mu(\cdot | \eta_0 = \eta_1 \eta_{-1} = 0) \implies " \mu \geq q^2 \mu^{(0)} "$.

►  $\implies D \geq cq^2 \bar{D}$.

Merci pour votre attention !

Bibliographie

-  O. Blondel, *Tracer diffusion at low temperature in kinetically constrained models*, à paraître dans *Annals of Applied Probability* (2014).
-  O. Blondel, C. Toninelli, *Is there a breakdown of the Stokes-Einstein relation in Kinetically Constrained Models at low temperature?*, soumis (2013).
-  Y. Jung, J. P. Garrahan, D. Chandler, *Excitation lines and the breakdown of Stokes-Einstein relations in supercooled liquids*, *Phys. Rev. E*, vol. 69, 061205 (2004).