

Un processus de feu de forêt.

Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens, Forges-les-Eaux

Jean-Maxime Le Cousin
Thèse dirigée par Nicolas Fournier

UNIVERSITÉ PARIS EST CRÉTEIL

7 avril 2014

Le modèle

Sur chaque site de \mathbb{Z} ,

- des graines tombent suivant un processus de Poisson de paramètre 1 ;
- des allumettes tombent suivant un processus de Poisson de paramètre λ .

Règles

Sur chaque site de \mathbb{Z} ,

- des graines tombent suivant un processus de Poisson de paramètre 1 ;
- des allumettes tombent suivant un processus de Poisson de paramètre λ .

Règles

- quand une graine tombe sur un site vide, un arbre apparaît instantanément ;

Sur chaque site de \mathbb{Z} ,

- des graines tombent suivant un processus de Poisson de paramètre 1 ;
- des allumettes tombent suivant un processus de Poisson de paramètre λ .

Règles

- quand une graine tombe sur un site vide, un arbre apparaît instantanément ;
- quand une allumette tombe sur un site i occupé, un feu démarre : l'arbre i reste en feu pendant un temps $\mathcal{E}(\pi)$ puis se propage à ses deux voisins et en s'éteignant (il peut alors recevoir une graine),

Sur chaque site de \mathbb{Z} ,

- des graines tombent suivant un processus de Poisson de paramètre 1 ;
- des allumettes tombent suivant un processus de Poisson de paramètre λ .

Règles

- quand une graine tombe sur un site vide, un arbre apparaît instantanément ;
- quand une allumette tombe sur un site i occupé, un feu démarre : l'arbre i reste en feu pendant un temps $\mathcal{E}(\pi)$ puis se propage à ses deux voisins et en s'éteignant (il peut alors recevoir une graine),
- quand une allumette tombe sur un site vide ou qu'une graine tombe sur un arbre, rien ne se passe.

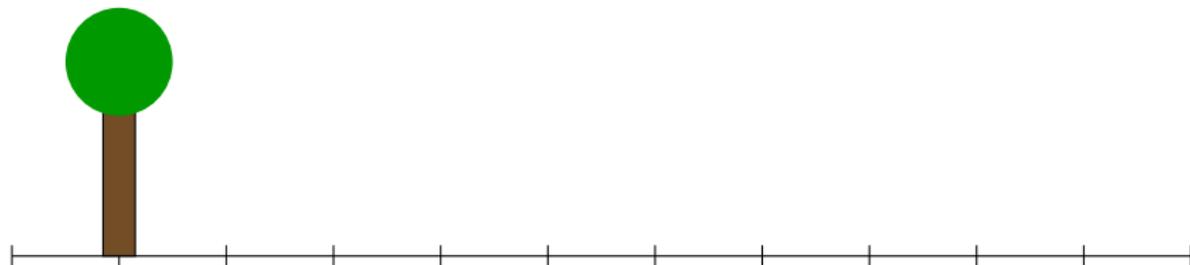
Une illustration



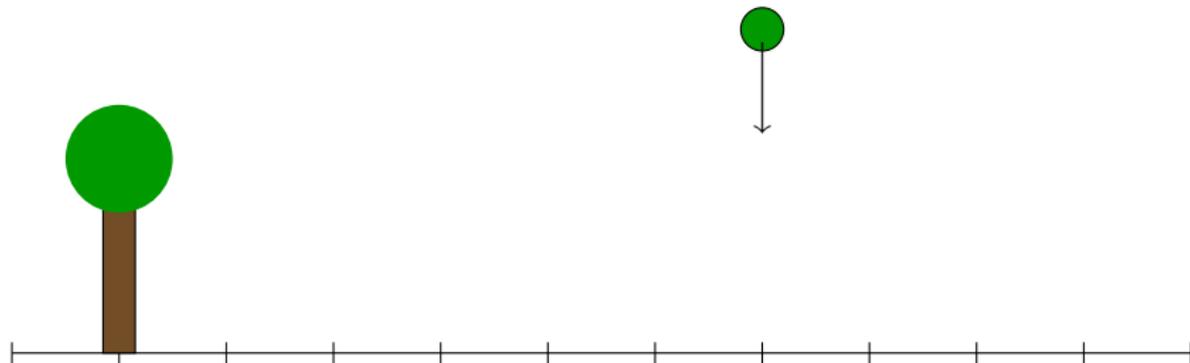
Une illustration



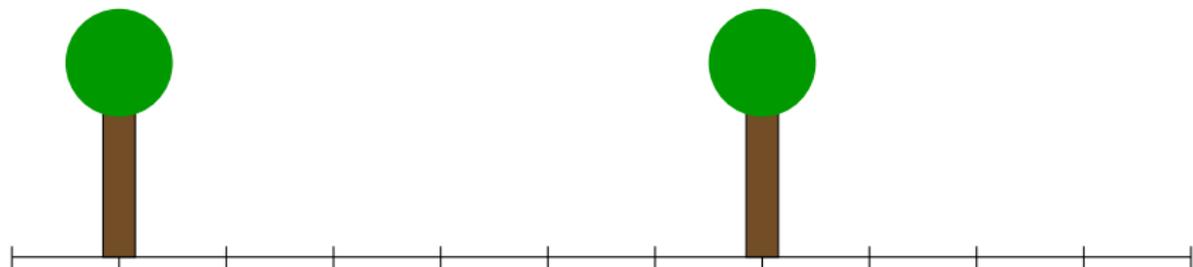
Une illustration



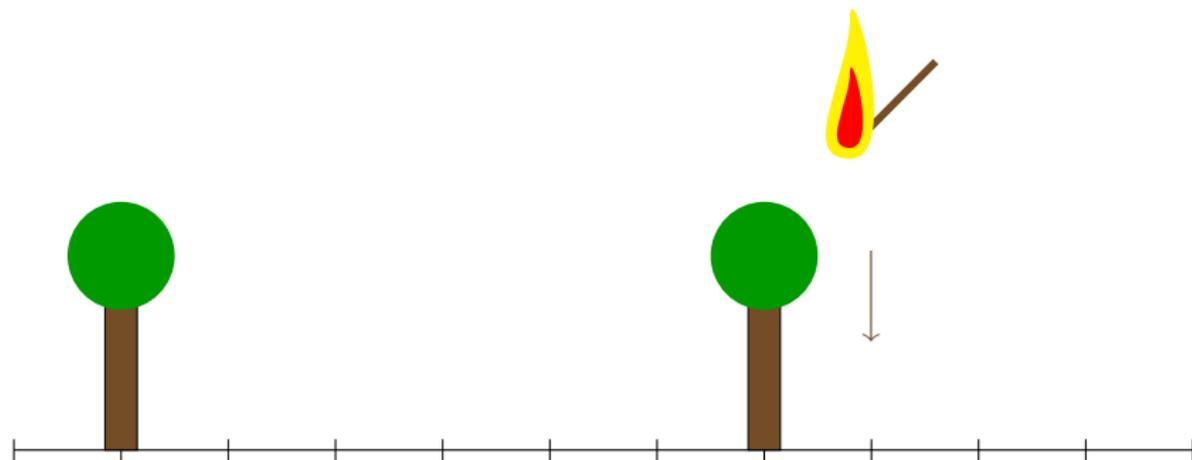
Une illustration



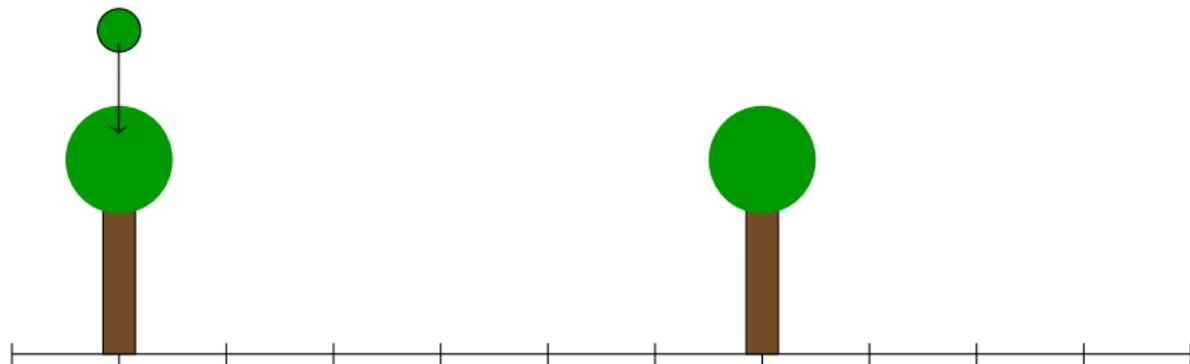
Une illustration



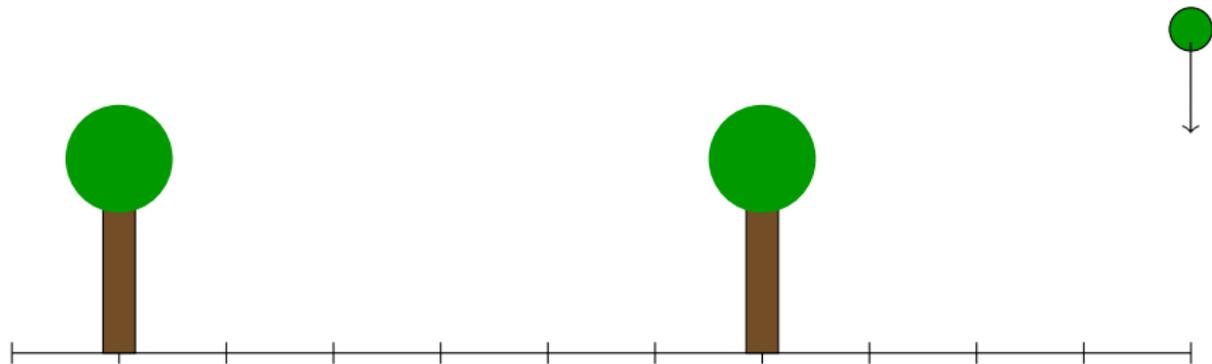
Une illustration



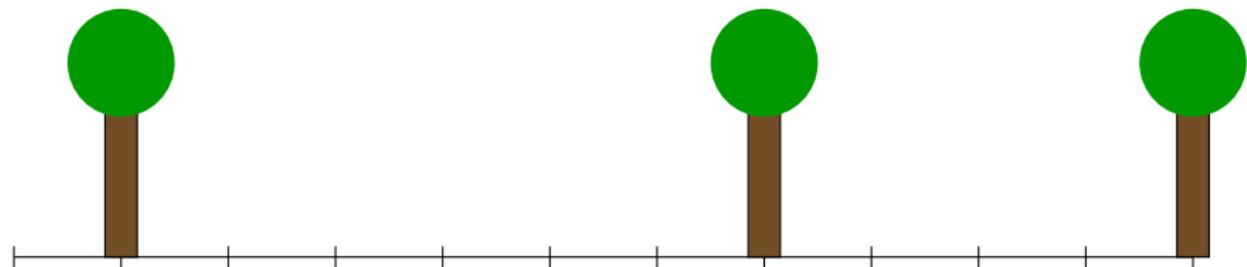
Une illustration



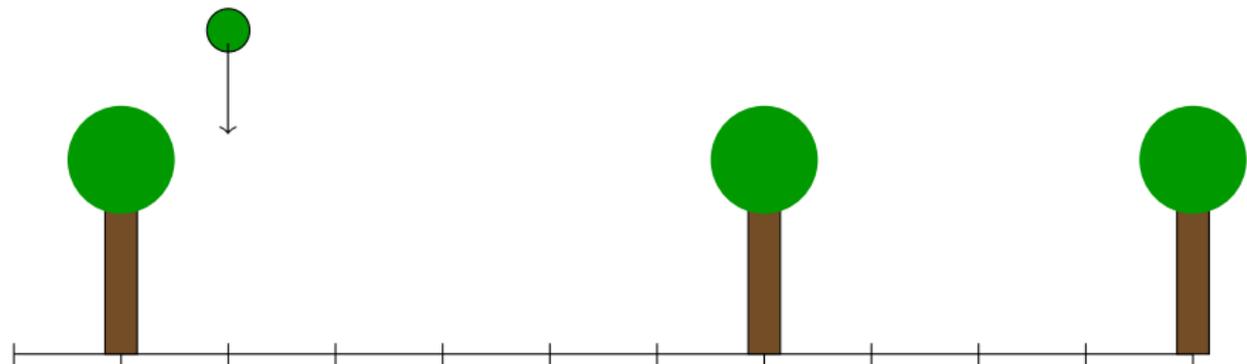
Une illustration



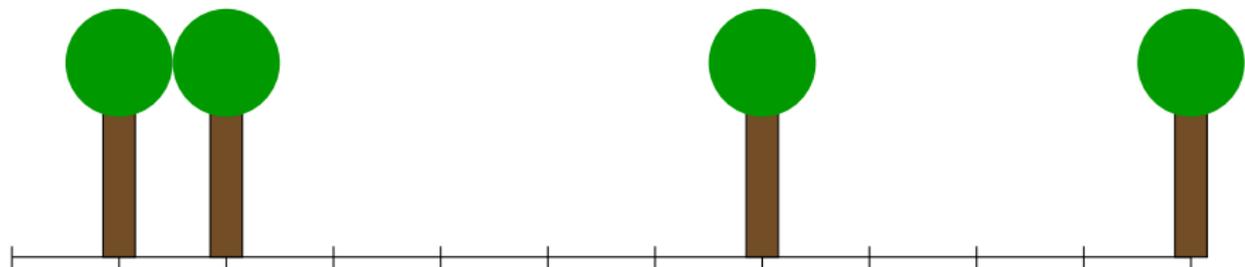
Une illustration



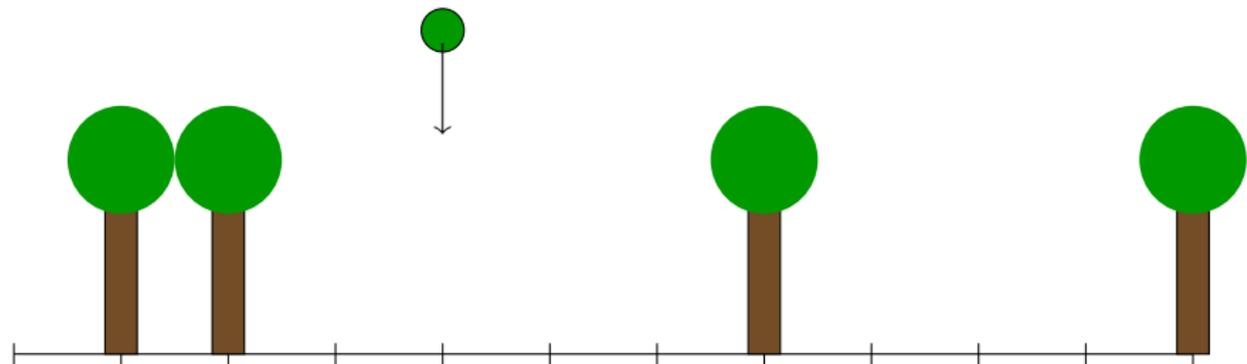
Une illustration



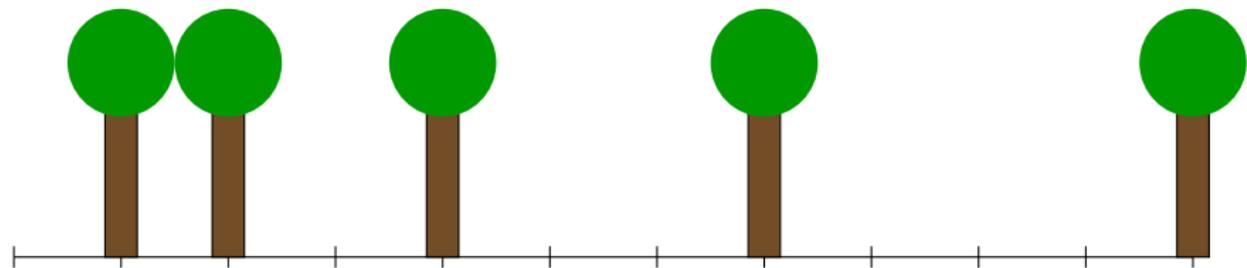
Une illustration



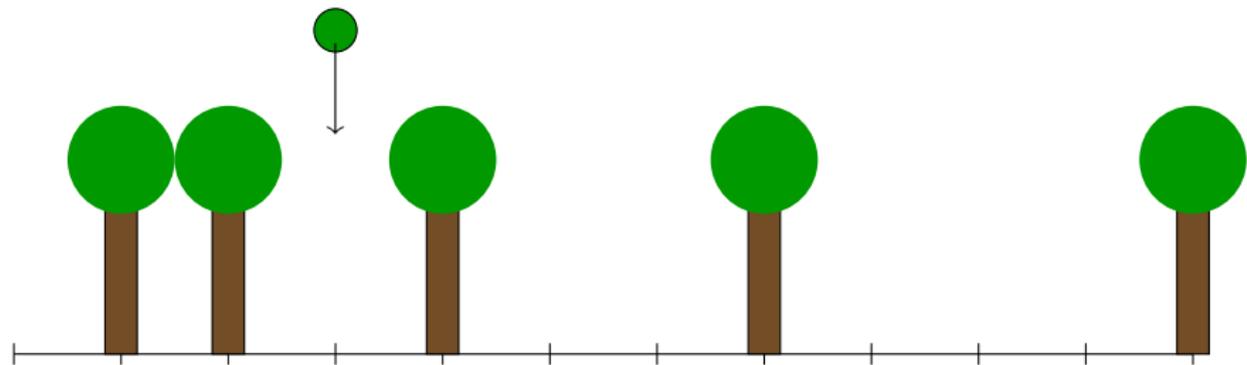
Une illustration



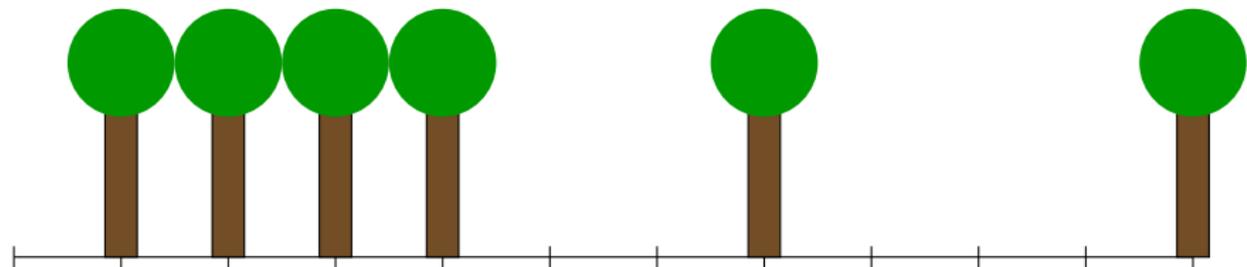
Une illustration



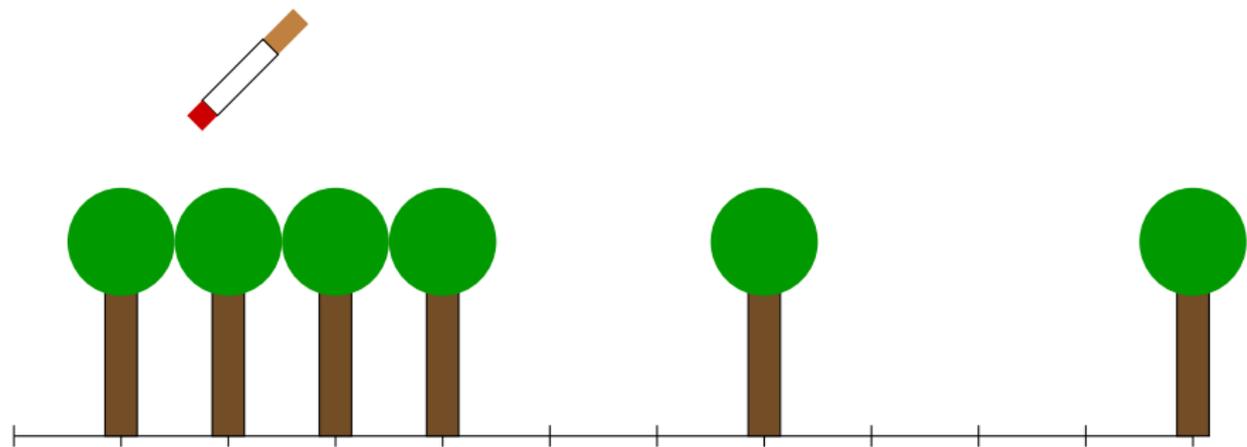
Une illustration



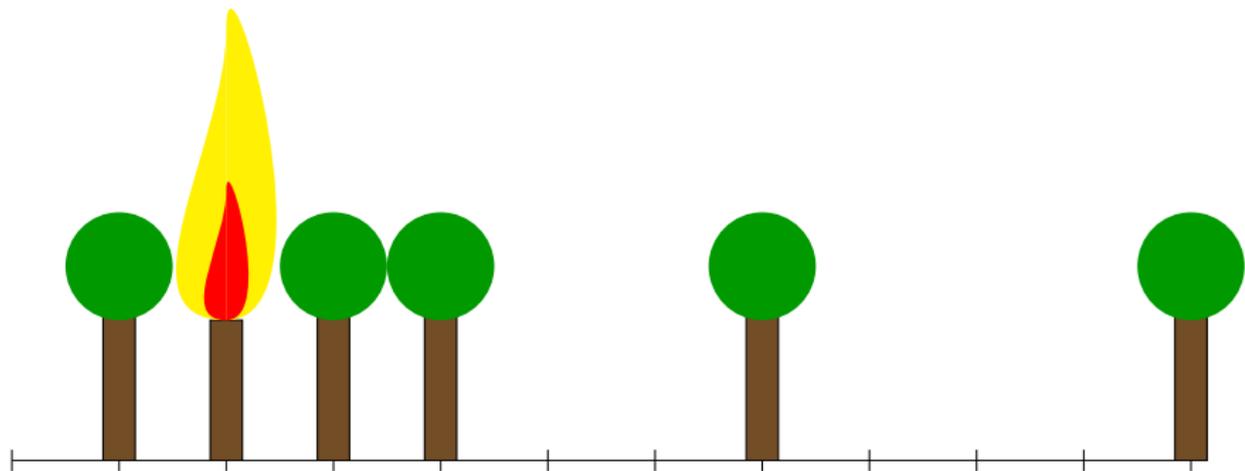
Une illustration



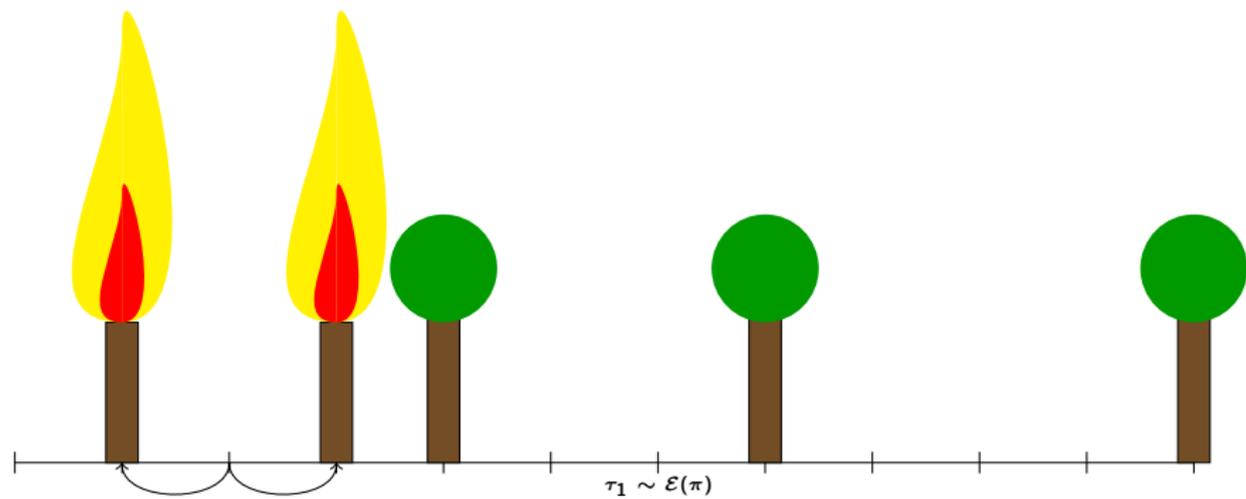
Une illustration



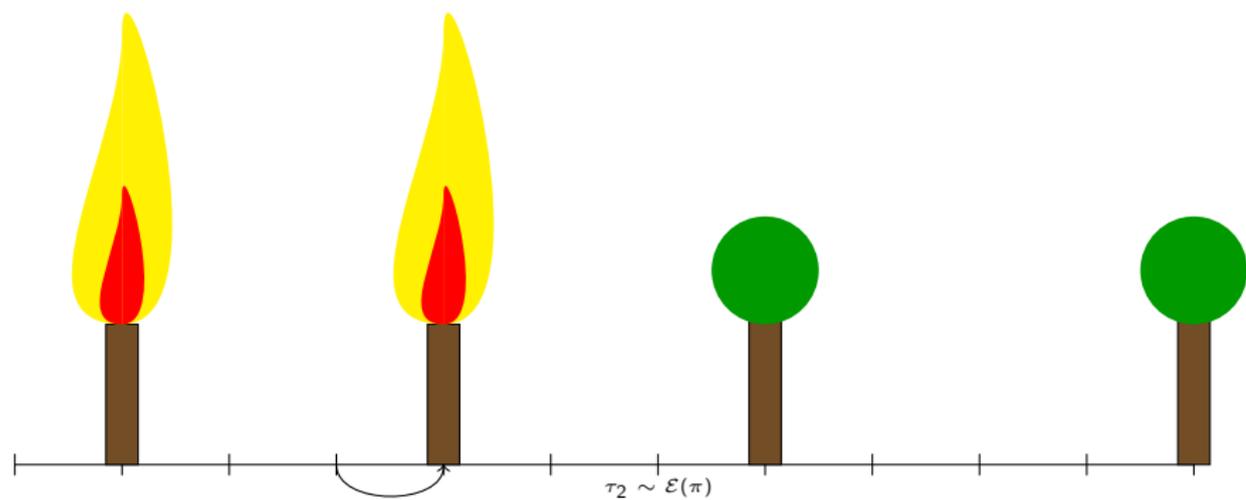
Une illustration



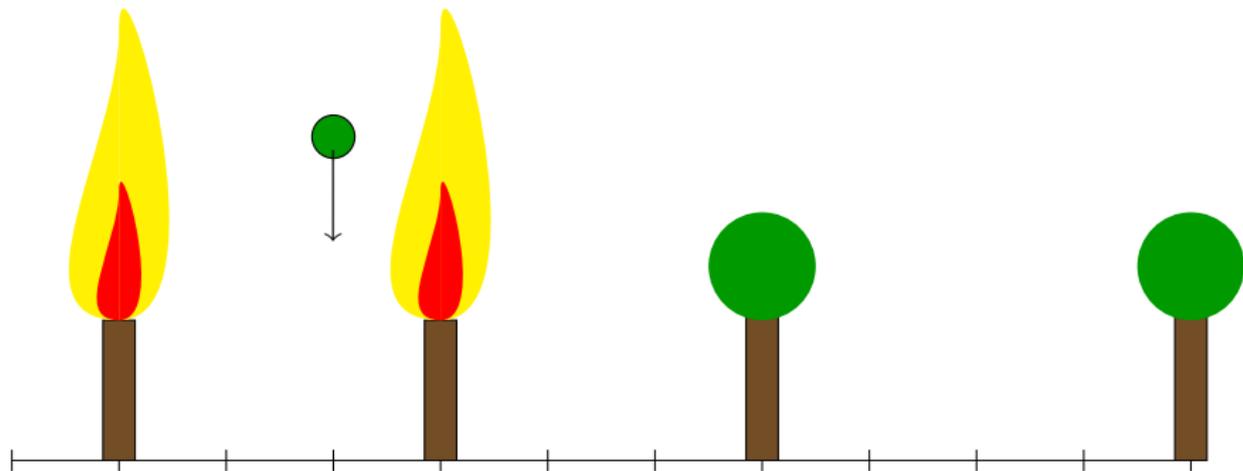
Une illustration



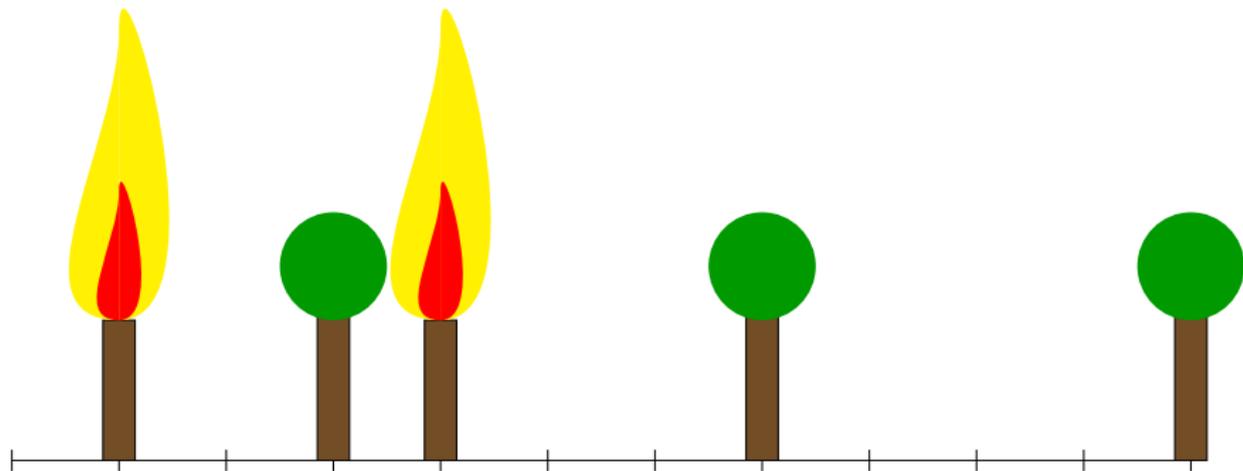
Une illustration



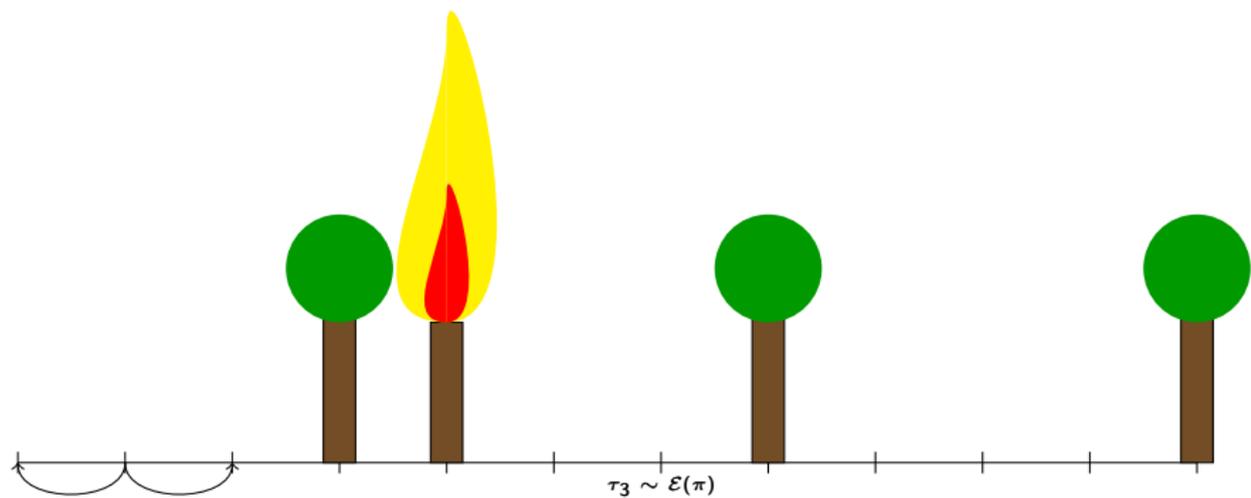
Une illustration



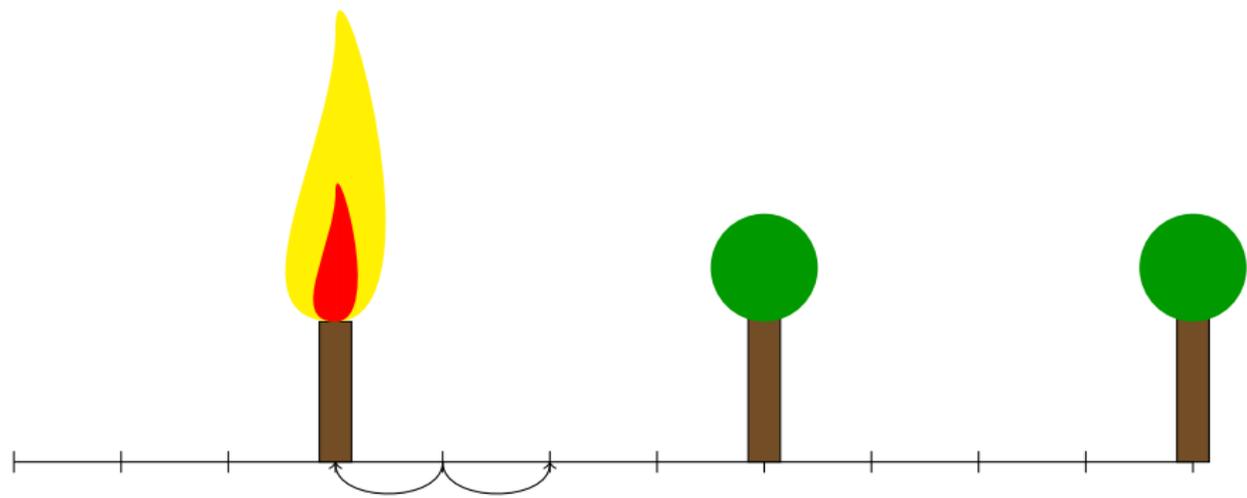
Une illustration



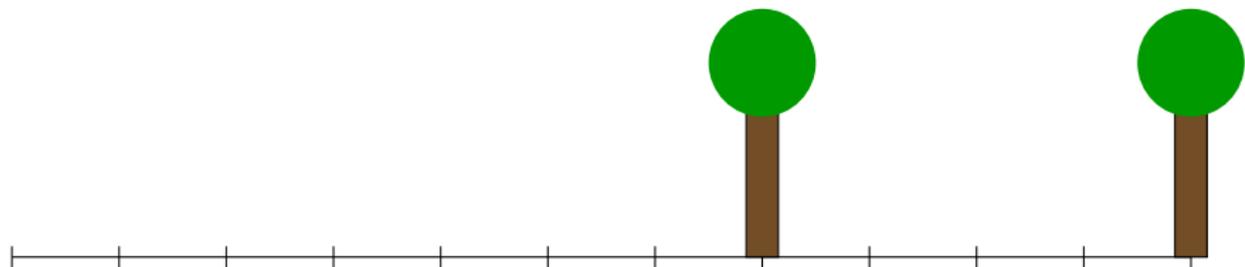
Une illustration



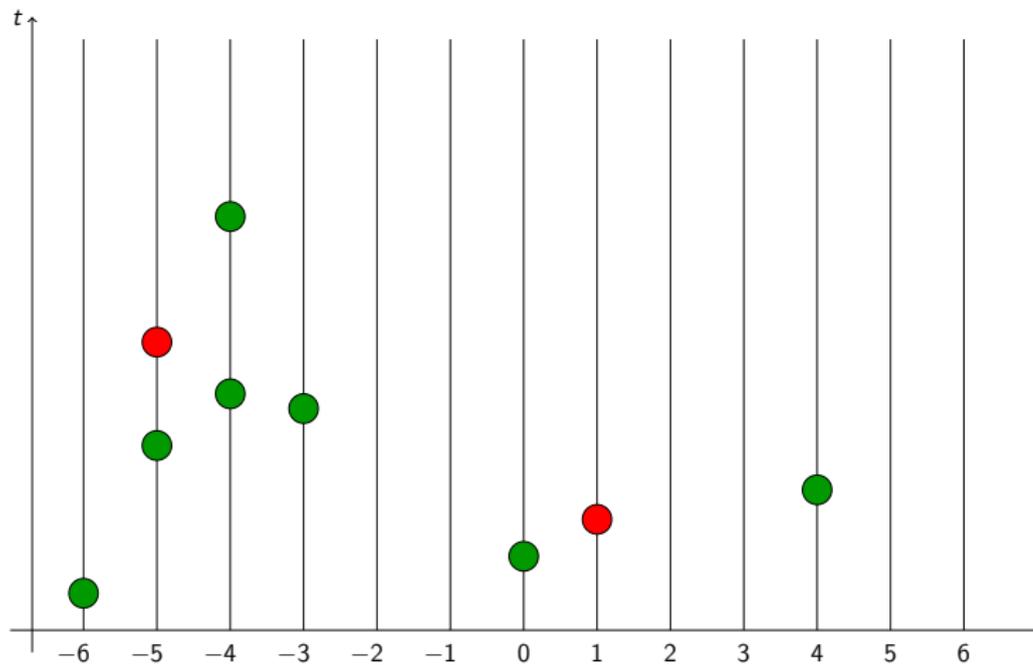
Une illustration



Une illustration



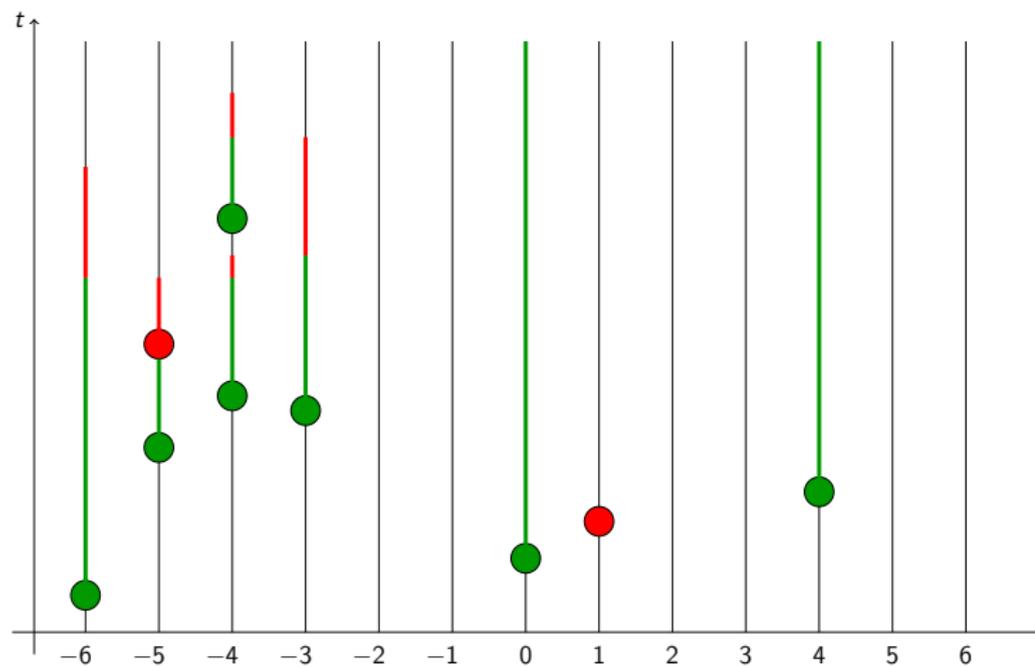
Point de vue



● graine

● allumette

Point de vue



● graine
● allumette

— site occupé
— site en feu

Le modèle a été introduit en 1992 par DROSSEL et SCHWABL. Il modélise très mal les phénomènes de feux de forêts !

En revanche, en dimension 2, remplaçons

- "site vide" → "individu sain",
- "site occupé" → "individu en période d'incubation",
- "arbre en feu" → "individu malade"

et on obtient un modèle de propagation d'une maladie (utilisé par exemple en 1996-1997 pour modéliser la propagation de la rougeole dans une île norvégienne)

Le modèle a été introduit en 1992 par DROSSEL et SCHWABL. Il modélise très mal les phénomènes de feux de forêts !

En revanche, en dimension 2, remplaçons

- "site vide" → "individu sain",
- "site occupé" → "individu en période d'incubation",
- "arbre en feu" → "individu malade"

et on obtient un modèle de propagation d'une maladie (utilisé par exemple en 1996-1997 pour modéliser la propagation de la rougeole dans une île norvégienne)

Avantages :

- modèle simple,
- exemple de [self-organized criticality system \(SOC\)](#)

SOC en quelques mots

Les SOC ont été introduits en 1987 par BAK, TANG et WIESENFELD pour expliquer et classer certains phénomènes naturels (fractals, $1/f$ -noise...).

SOC en quelques mots

Les SOC ont été introduits en 1987 par BAK, TANG et WIESENFELD pour expliquer et classer certains phénomènes naturels (fractals, $1/f$ -noise...).

Idée : les interactions sont locales jusqu'à un temps critique t_c , à partir duquel une perturbation locale a des interactions à longue portée. (tas de sable, tremblements de terre,...)

Le problème

Le problème

Le problème

Décrire l'asymptotique quand $\lambda \rightarrow 0$ et $\pi \rightarrow \infty$.

Le problème

Le problème

Décrire l'asymptotique quand $\lambda \rightarrow 0$ et $\pi \rightarrow \infty$.

Remarque

Si on fait $\lambda \rightarrow 0$ sans changement d'échelle on obtient un processus de croissance sans feux.

Le problème

Le problème

Décrire l'asymptotique quand $\lambda \rightarrow 0$ et $\pi \rightarrow \infty$.

Remarque

Si on fait $\lambda \rightarrow 0$ sans changement d'échelle on obtient un processus de croissance sans feux.

- Il faut "régler" (accélérer) le temps pour voir un comportement critique.

Le problème

Décrire l'asymptotique quand $\lambda \rightarrow 0$ et $\pi \rightarrow \infty$.

Remarque

Si on fait $\lambda \rightarrow 0$ sans changement d'échelle on obtient un processus de croissance sans feux.

- Il faut "régler" (accélérer) le temps pour voir un comportement critique.
- Peut-on trouver un processus limite, dans des échelles correctes de temps et d'espace ?

Le problème

Décrire l'asymptotique quand $\lambda \rightarrow 0$ et $\pi \rightarrow \infty$.

Remarque

Si on fait $\lambda \rightarrow 0$ sans changement d'échelle on obtient un processus de croissance sans feux.

- Il faut "régler" (accélérer) le temps pour voir un comportement critique.
- Peut-on trouver un processus limite, dans des échelles correctes de temps et d'espace ?
- Quelle est la taille typique des *forêts* en fonction de λ et π (ils tendent vers l'infini quand $\lambda \rightarrow 0$ mais à quelle vitesse ?)

Changement d'échelle, Transition de phase

Chaque site est occupé avec probabilité $1 - e^{-t}$. Donc, en l'absence d'allumettes, la forêt qui contient 0 est de la forme $\{G, \dots, D\}$, où G et D sont de loi géométrique de paramètre e^{-t} .

Chaque site est occupé avec probabilité $1 - e^{-t}$. Donc, en l'absence d'allumettes, la forêt qui contient 0 est de la forme $\{G, \dots, D\}$, où G et D sont de loi géométrique de paramètre e^{-t} .

A l'instant t , les forêts ont une taille de l'ordre de

$$\mathbb{E}[\mathcal{G}(e^{-t})] = e^t.$$

Chaque site est occupé avec probabilité $1 - e^{-t}$. Donc, en l'absence d'allumettes, la forêt qui contient 0 est de la forme $\{G, \dots, D\}$, où G et D sont de loi géométrique de paramètre e^{-t} .

A l'instant t , les forêts ont une taille de l'ordre de

$$\mathbb{E}[\mathcal{G}(e^{-t})] = e^t.$$

De plus, chaque amas brûle avec taux

$$\lambda \times (\text{sa taille}).$$

Chaque site est occupé avec probabilité $1 - e^{-t}$. Donc, en l'absence d'allumettes, la forêt qui contient 0 est de la forme $\{G, \dots, D\}$, où G et D sont de loi géométrique de paramètre e^{-t} .

A l'instant t , les forêts ont une taille de l'ordre de

$$\mathbb{E}[\mathcal{G}(e^{-t})] = e^t.$$

De plus, chaque amas brûle avec taux

$$\lambda \times (\text{sa taille}).$$

Donc pour que l'amas qui contient 0 brûle au bout d'un temps de l'ordre de 1, il faut accélérer le temps par un facteur $a_\lambda = \log(1/\lambda)$.

$$\lambda \times e^{a_\lambda} = 1.$$

On souhaite alors que en gros, 1 allumette tombe par unité d'espace par unité de temps. Puisque sur chaque site, une allumette tombe avec taux λ , et qu'on utilise une échelle de temps de l'ordre de \mathbf{a}_λ , on doit considérer une unité d'espace de l'ordre de

$$\mathbf{n}_\lambda = \left\lfloor \frac{1}{\lambda \mathbf{a}_\lambda} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\lambda \log(1/\lambda)} \right\rfloor \text{ sites}$$

On souhaite alors que en gros, 1 allumette tombe par unité d'espace par unité de temps. Puisque sur chaque site, une allumette tombe avec taux λ , et qu'on utilise une échelle de temps de l'ordre de \mathbf{a}_λ , on doit considérer une unité d'espace de l'ordre de

$$\mathbf{n}_\lambda = \left\lfloor \frac{1}{\lambda \mathbf{a}_\lambda} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\lambda \log(1/\lambda)} \right\rfloor \text{ sites}$$

On va identifier, par exemple,

$$\begin{aligned} & [0; \mathbf{a}_\lambda T] \text{ avec } [0; T] \\ \text{et } \{0, \dots, \mathbf{n}_\lambda\} \subset \mathbb{Z} & \text{ avec } [0; 1] \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

On souhaite alors que en gros, 1 allumette tombe par unité d'espace par unité de temps. Puisque sur chaque site, une allumette tombe avec taux λ , et qu'on utilise une échelle de temps de l'ordre de \mathbf{a}_λ , on doit considérer une unité d'espace de l'ordre de

$$\mathbf{n}_\lambda = \left\lfloor \frac{1}{\lambda \mathbf{a}_\lambda} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\lambda \log(1/\lambda)} \right\rfloor \text{ sites}$$

On va identifier, par exemple,

$$\begin{aligned} & [0; \mathbf{a}_\lambda T] \text{ avec } [0; T] \\ \text{et } \{0, \dots, \mathbf{n}_\lambda\} \subset \mathbb{Z} & \text{ avec } [0; 1] \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

En résumé

Le point (i, t) devient le point $(i/\mathbf{n}_\lambda, t/\mathbf{a}_\lambda)$ ou de manière équivalente, le point $(\lfloor \mathbf{n}_\lambda x \rfloor, \mathbf{a}_\lambda t)$ devient le point (x, t) .

Feux microscopiques et macroscopiques

(pour λ petit, π grand)

Feux macroscopiques

Un arbre reste en feu en moyenne pendant un temps $1/\pi$. Donc un feu met un temps $\frac{n_\lambda}{\pi}$ pour parcourir une composante de taille n_λ .

Feux macroscopiques

Un arbre reste en feu en moyenne pendant un temps $1/\pi$. Donc un feu met un temps $\frac{n_\lambda}{\pi}$ pour parcourir une composante de taille n_λ .
On doit comparer ce temps au temps caractéristique a_λ .

Feux macroscopiques

Un arbre reste en feu en moyenne pendant un temps $1/\pi$. Donc un feu met un temps $\frac{\mathbf{n}_\lambda}{\pi}$ pour parcourir une composante de taille \mathbf{n}_λ .
On doit comparer ce temps au temps caractéristique \mathbf{a}_λ .

On suppose que

$$\frac{\mathbf{n}_\lambda}{\mathbf{a}_\lambda \pi} \rightarrow p \in [0, \infty]$$

Rappel : $\frac{\mathbf{n}_\lambda}{\mathbf{a}_\lambda \pi} \sim \frac{1}{\lambda \log(1/\lambda)^2 \pi}$.

Feux macroscopiques

Un arbre reste en feu en moyenne pendant un temps $1/\pi$. Donc un feu met un temps $\frac{\mathbf{n}_\lambda}{\pi}$ pour parcourir une composante de taille \mathbf{n}_λ .
On doit comparer ce temps au temps caractéristique \mathbf{a}_λ .

On suppose que

$$\frac{\mathbf{n}_\lambda}{\mathbf{a}_\lambda \pi} \rightarrow p \in [0, \infty]$$

Rappel : $\frac{\mathbf{n}_\lambda}{\mathbf{a}_\lambda \pi} \sim \frac{1}{\lambda \log(1/\lambda)^2 \pi}$.

Plus p est petit, plus le temps que met un feu à brûler une composante de taille \mathbf{n}_λ est petit et plus le feu se propage rapidement.

Si une allumette tombe dans une zone qui contient un nombre $N \ll \mathbf{n}_\lambda$ de sites, alors (après changement d'échelle), le feu se propage en un temps

$$\frac{N}{\mathbf{a}_\lambda \pi} \ll \frac{\mathbf{n}_\lambda}{\mathbf{a}_\lambda \pi} \simeq p.$$

Si une allumette tombe dans une zone qui contient un nombre $N \ll \mathbf{n}_\lambda$ de sites, alors (après changement d'échelle), le feu se propage en un temps

$$\frac{N}{\mathbf{a}_\lambda \pi} \ll \frac{\mathbf{n}_\lambda}{\mathbf{a}_\lambda \pi} \simeq p.$$

A la limite, le feu se propage instantanément.

Si une allumette tombe dans une zone qui contient un nombre $N \ll \mathbf{n}_\lambda$ de sites, alors (après changement d'échelle), le feu se propage en un temps

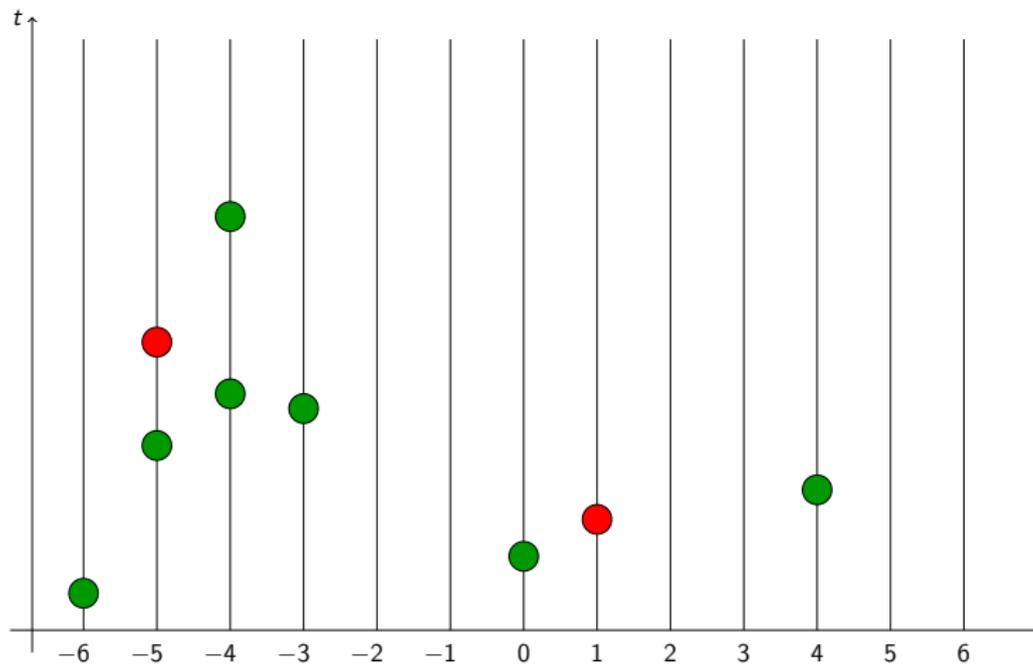
$$\frac{N}{\mathbf{a}_\lambda \pi} \ll \frac{\mathbf{n}_\lambda}{\mathbf{a}_\lambda \pi} \simeq p.$$

A la limite, le feu se propage instantanément.

De plus, la zone vidée met un certain temps à se re-remplir : cela crée une *barrière*.

Processus limite

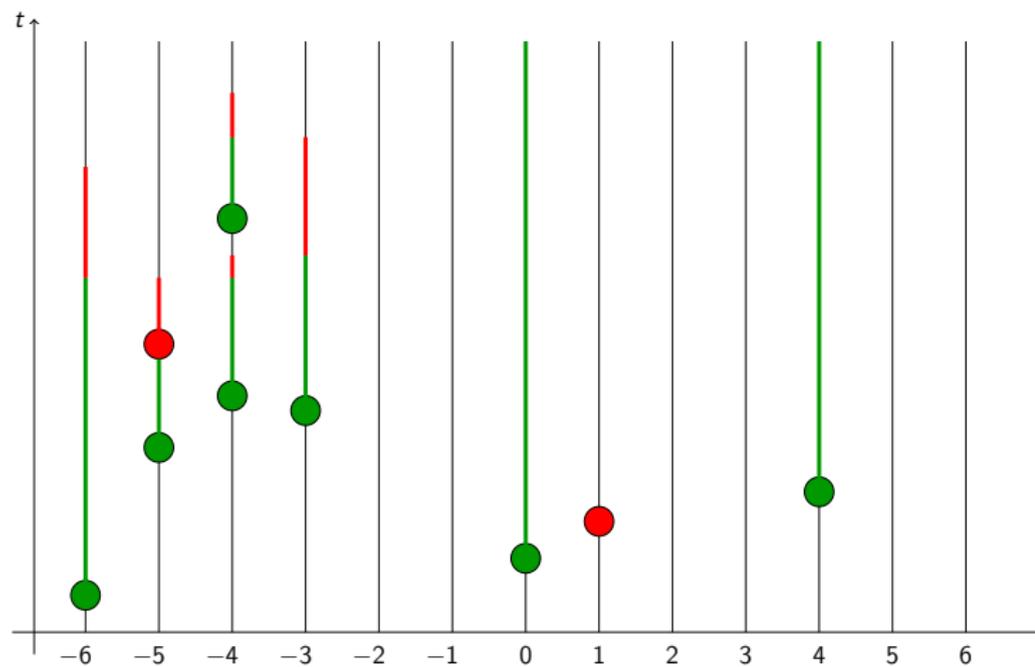
Point de vue



● graine

● allumette

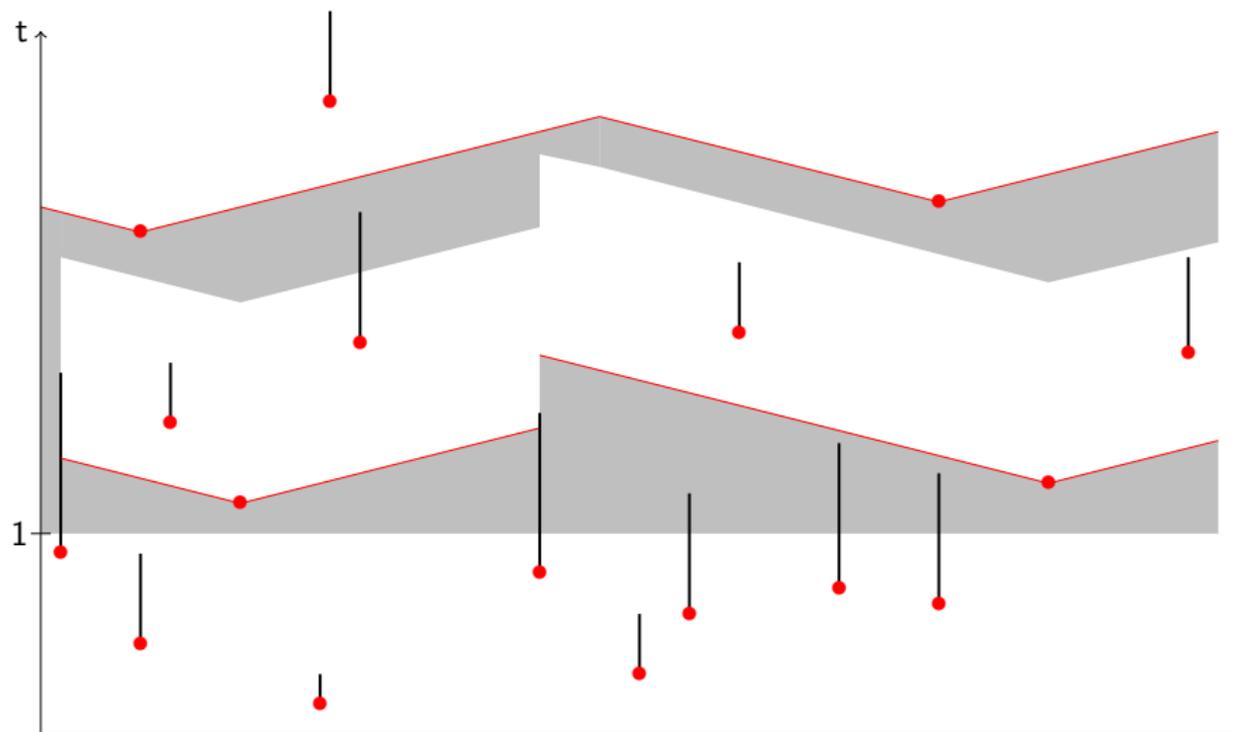
Point de vue



● graine
● allumette

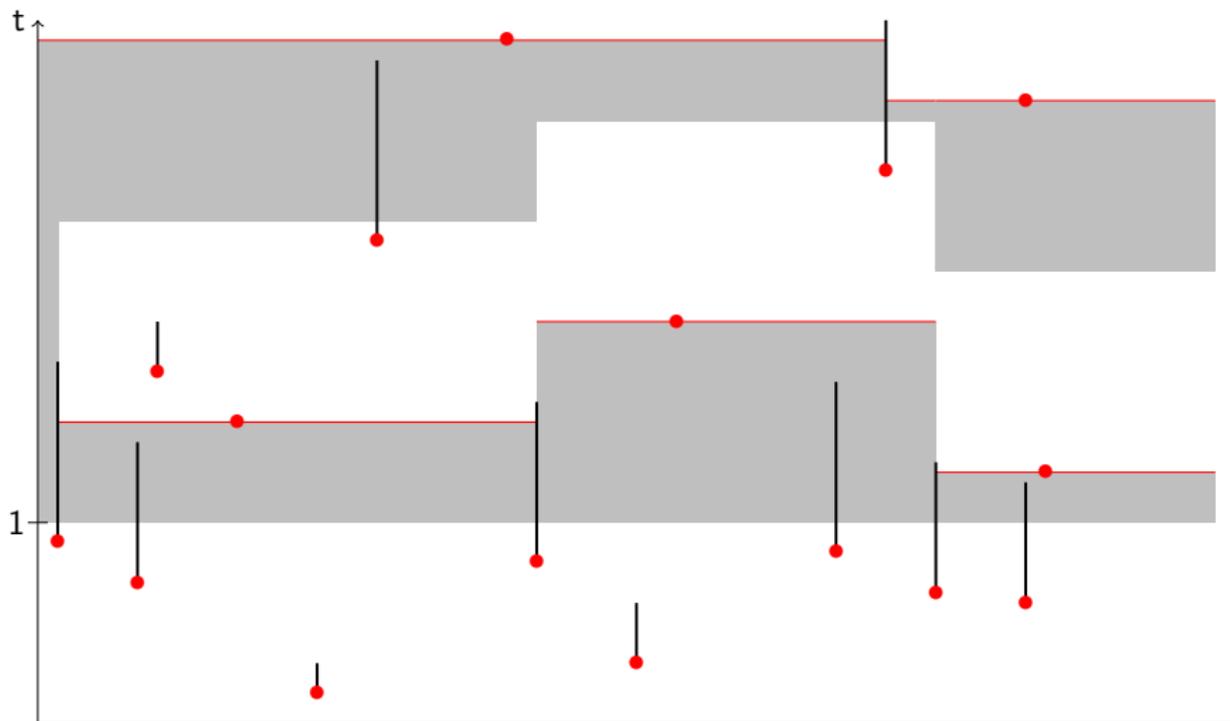
— site occupé
— site en feu

Processus limite pour $p \in]0; \infty[$



● allumette

Processus limite pour $p = 0$



● allumette

Théorème

Quand $\lambda \rightarrow 0$ et $\pi \rightarrow \infty$, dans les différents régimes, on a une convergence en probabilité du processus des feux de forêts vers le processus limite.

On en déduit le corollaire suivant, qui est établi rigoureusement (mais très faiblement) un résultat des physiciens Drossel-Clar-Schwabl 1992-1993, Grassberger 2002, Dhar 2006, ...)

Corollaire

Retour aux échelles de temps initiales : quand $\lambda \rightarrow 0$, $\pi \rightarrow \infty$, pour $t \geq 3 \log(1/\lambda)$ (OK à l'équilibre), la densité de la loi de la taille de l'amas qui contient 0 est de la forme (en très très gros) :

$$\frac{a}{(1+x) \log(1/\lambda)} \mathbf{1}_{\{x \in [0; 1/\lambda]\}} + b \lambda \log(1/\lambda) e^{-\lambda \log(1/\lambda)x} \mathbf{1}_{\{x > 0\}}$$

Le premier morceau est la densité de $(1/\lambda)^Z$ si Z uniforme sur $[0; 1]$.

(On démontre des encadrements uniformes en temps).

Fin de l'exposé