EDSR ergodiques et EDPs avec conditions de Neumann au bord sous des hypothèses de faible dissipativité

Pierre-Yves Madec
Université de Rennes 1 - IRMAR

Onzième Colloque de Jeune Probabilistes et Statisticiens

10 septembre 2014

Table des matières

Rappels sur les EDSRs

EDSR : cas général

$$Y_t = \xi + \int_t^T \psi(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \qquad \forall t \in [0, T]$$

Une solution de cette équation est un couple (Y, Z) tel que :

- Y et Z sont progressivement mesurables
- $\mathbb{P}$-p.s. :

$$Y_t = \xi + \int_t^T \psi(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \le t \le T$$

Rappels sur les EDSRs : le cadre monotone

$$Y_t = Y_T + \int_t^T \psi(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad \forall 0 \leq t \leq T < +\infty$$

Hypothèses :

- ψ est M_ψ-Lipschitz en y and z
- ψ est monotone en y : $\exists \mu > 0$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$(\psi(s, y_1, z) - \psi(s, y_2, z)).(y_1 - y_2) \leq -\mu |y_1 - y_2|^2$$

- $|\psi(t, 0, 0)| \leq K$

Théorème (Briand-Hu 1998)

Il existe une unique solution (Y, Z) à l'EDSR précédente, tel que Y est un processus adapté continu et borné, Z progressivement mesurable, $\mathbb{E}\int_0^T |Z_s|^2 \mathrm{d}s < +\infty$, i.e. $Z \in \mathscr{M}^2$,

$$|Y_t| \leq \frac{M_\psi}{\mu}.$$

Rappels sur les EDSR ergodiques

Qu'est ce qu'une EDSR ergodique ?

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda]\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \mathrm{d}W_s, \qquad \forall 0 \leq t \leq T < +\infty$$

Solution

$\Rightarrow$ triplet (Y_t^x, Z_t^x, λ) à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1\times k} \times \mathbb{R}$

Méthode générale pour construire une solution

Considérer l'EDSR monotone suivante en horizon infini : $\alpha > 0$

$$Y_t^{\alpha,x} = Y_T^{\alpha,x} + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^{\alpha,x}) - \alpha Y_s^{\alpha,x}]\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{\alpha,x}\mathrm{d}W_s$$

On définit :

$$v^\alpha(x) = Y_0^{\alpha,x}$$

Obtenir de "bonnes" estimées sur v^α :

$$\alpha|v^\alpha(0)| \leq M_\psi$$

$$|v^\alpha(x) - v^\alpha(y)| \leq C(1 + |x|^2 + |y|^2)$$

$$|v^\alpha(x) - v^\alpha(y)| \leq C(1 + |x|^2 + |y|^2)|x - y|$$

Méthode générale pour construire une solution

Extraction diagonale en α :

$$\alpha v^{\alpha}(0) \longrightarrow \lambda$$
$$v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0) \to v(x)$$

Passer à la limite en α :

$$v^{\alpha}(X_{\boldsymbol{t}}^{x}) - v^{\alpha}(0) \to Y_{\boldsymbol{t}}^{x}$$
$$Z_{\boldsymbol{t}}^{\alpha,x} \to Z_{\boldsymbol{t}}^{x}$$
$$\alpha v^{\alpha}(0) \to \lambda$$

Rappel sur les EDSR ergodiques : cadre infini dimensionnel

$$X_t^x = x + \int_0^t AX_s^x + F(X_s^x)\mathrm{d}s + \int_0^t G\mathrm{d}W_s, \qquad t \geq 0;$$

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda]\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \mathrm{d}W_s, \qquad 0 \leq t \leq T + \infty.$$

Fuhrman, Hu, Tessitore (2007)

- hypothèse de **stricte dissipativité**, $\exists \eta > 0$, $\forall x, y$,
  $< Ax + F(x) - Ay - F(y), x - y > \quad \leq \quad -\eta|x - y|^2$

$\Rightarrow$ résultat important : $|X_t^x - X_t^y| \leq e^{-\eta t}|x - y|$

Rappels sur les EDSR ergodiques : cadre infini dimensionnel

$$X_t^x = x + \int_0^t AX_s^x + F(X_s^x)\mathrm{d}s + \int_0^t G\mathrm{d}W_s, \qquad t \geq 0;$$

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda]\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \mathrm{d}W_s, \qquad 0 \leq t \leq T + \infty.$$

Debussche, Hu, Tessitore (2010)

- hypothèse de **faible dissipativité** :
  $\exists \eta > 0, \forall x, y, \quad < Ax - Ay, x - y > \leq -\eta |x-y|^2$
  F est Lipschitz bornée et Gâteaux différentiable

$\Rightarrow$ résultat important "Basic Coupling Estimate" : $\forall \phi \in B_b$,
$|\mathscr{P}_t[\phi](x) - \mathscr{P}_t[\phi](y)| \leq C(1+|x|^2+|y|^2)e^{-\hat{\eta}t}||\phi||_\infty$
où $\mathscr{P}_t[\Phi](x) = \mathbb{E}\Phi(X_t^x)$.

Rappels sur les EDSR ergodiques : cadre fini dimensionnel

$G = \{\phi > 0\}$ un sous ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^d$ dans lequel X_t^x est réfléchi.

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t f(X_s^x)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\mathrm{d}W_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)\mathrm{d}K_s^x, \quad t \geq 0; \\ K_t^x = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^x \in \partial G\}}\mathrm{d}K_s^x, \quad K_\cdot^x \ \text{ est croissant;} \end{cases}$$

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda]\mathrm{d}s + \int_t^T [g(X_s^x) - \mu]\mathrm{d}K_s^x - \int_t^T Z_s^x \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leq t \leq T + \infty.$$

2 sortes de solutions

- (Y, Z, λ) si μ est donné ;
- (Y, Z, μ) si λ est donné.

Rappels sur les EDSRs

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t f(X_s^x)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\mathrm{d}W_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)\mathrm{d}K_s^x, \quad t \geq 0; \\ K_t^x = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^x \in \partial G\}}\mathrm{d}K_s^x, \quad K_\cdot^x \text{ is non decreasing;} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda]\mathrm{d}s + \int_t^T [g(X_s^x) - \mu]\mathrm{d}K_s^x \\ - \int_t^T Z_s^x \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leq t \leq T + \infty. \end{aligned}$$

Richou (2009)

- G un sous ensemble convexe **borné** de $\mathbb{R}^d$;
- X_t^x réfléchi dans G ;
- hypothèse de stricte dissipativité, $\exists \eta > 0$, $\forall x, y$,

$$< f(x) - f(y), x - y > + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\sigma(x) - \sigma(y))^t(\sigma(x) - \sigma(y))] \leq -\eta|x - y|^2.$$

$$-\eta + K_{\psi,z}K_\sigma \quad < \quad 0.$$

$\Rightarrow$ résultat important : $|X_t^x - X_t^y| \leq e^{-\eta t}|x - y|$ (lorsque σ est constante)

EDSR ergodiques : cadre de travail

Cadre de travail

- G un convexe de $\mathbb{R}^d$;
- $(X_t^x)_{t\geq 0}$ est réfléchie dans G ;
- hypothèse de faible dissipativité, $f = d + b$, :
  - d est strictement dissipatif : $\exists \eta > 0$, $\forall x, y$, $(d(x) - d(y)).(x - y) \leq -\eta |x - y|^2$, localement Lipchitz et à croissance polynômiale ;
  - b est mesurable borné B ;
- σ est Lipschitz, inversible, σ et σ^{-1} sont bornées ;
- $\psi(x, 0)$ bornée, $(x, z) \to \psi(x, z)$ est Lipschitz en z.

EDSR ergodique : Existence

Problème initial : condition de Neumann au bord nulle

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t (d+b)(X_s^x)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\mathrm{d}W_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)\mathrm{d}K_s^x, \quad t \geq 0; \\ K_t^x = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^x \in \partial G\}}\mathrm{d}K_s^x, \quad K_\cdot^x \text{ is non decreasing;} \end{cases}$$

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda]\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leq t \leq T + \infty.$$

devient

Problème pénalisé

$$X_t^{x,n} = x + \int_0^t (d + F_n + b)(X_s^{x,n})\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^{x,n})\mathrm{d}W_s.$$

$$Y_t^{x,n} = Y_T^{x,n} + \int_t^T [\psi(X_s^{x,n}, Z_s^{x,n}) - \lambda^n]\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{x,n}\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leq t \leq T < +\infty.$$

Méthode de pénalisation du domaine, rappels

Terme de pénalisation

$$F_n(x) = -2n(x - \Pi(x)), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Propriété de F_n

- F_n est 0-dissipative $\Longrightarrow d + F_n$ est η-dissipative

Lemmes

Propriété de bornitude du processus dissipatif

$$\mathbb{E}|X_t^{x,n}|^2 \leq C(1 + |x|^2 e^{-2\eta t})$$

Lemme : "Basic coupling estimate"

Il existe $C > 0$ et $\mu > 0$ tel que $\forall \Phi \in B_b(\mathbb{R}^d)$,

$$|\mathscr{P}_t^n[\Phi](x) - \mathscr{P}_t^n[\Phi](y)| \leq C(1 + |x|^2 + |y|^2)e^{-\mu t}|\Phi|_0$$

où $\mathscr{P}_t[\Phi](x) = \mathbb{E}\Phi(X_t^{x,n})$.

Approche classique : transformer l'EDSR ergodique en une EDSR en horizon infini

Penalized problem

$$X_t^{x,n} = x + \int_0^t (d + F_n + b)(X_s^{x,n})\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^{x,n})\mathrm{d}W_s.$$

$$\begin{aligned} Y_t^{x,\alpha,n} = Y_T^{x,\alpha,n} + \int_t^T [\psi(X_s^{x,n}, Z_s^{x,\alpha,n}) - \alpha Y_s^{x,\alpha,n}]\mathrm{d}s \\ - \int_t^T Z_s^{x,\alpha,n}\mathrm{d}W_s, \quad 0 \le t \le T < +\infty. \end{aligned}$$

On définit

$$v^{\alpha,n}(x) := Y_0^{x,\alpha,n}$$

le Basic coupling estimates implique que :

$$|v^{\alpha,n}(x) - v^{\alpha,n}(y)| \le C(1 + |x|^2 + |y|^2)$$

Approche classique : échec

On a besoin de

$$|v^{\alpha,n}(x) - v^{\alpha,n}(y)| \leq C(1 + |x|^2 + |y|^2)|x - y|$$

$\Rightarrow$ régularisation.

Problème pénalisé et régularisé

$$X_t^{x,n,\varepsilon} = x + \int_0^t (d^\varepsilon + F_n^\varepsilon + b^\varepsilon)(X_s^{x,n,\varepsilon})\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma^\varepsilon(X_s^{x,n,\varepsilon})\mathrm{d}W_s.$$

$$Y_t^{x,\alpha,n,\varepsilon} = Y_T^{x,\alpha,n,\varepsilon} + \int_t^T [\psi^\varepsilon(X_s^{x,n,\varepsilon}, Z_s^{x,\alpha,n,\varepsilon}) - \alpha Y_s^{x,\alpha,n,\varepsilon}]\mathrm{d}s$$
$$- \int_t^T Z_s^{x,\alpha,n,\varepsilon}\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leq t \leq T < +\infty$$

On définit :

$$v^{\alpha,n,\varepsilon}(x) := Y_0^{\alpha,n,\varepsilon}$$

Construction d'une solution

On obtient :

$$|\nabla v^{\alpha,n,\varepsilon}(x)| \leq C(1+|x|^2)$$

Alors :

$$|v^{\alpha,n,\varepsilon}(x) - v^{\alpha,n,\varepsilon}(y)| \leq C(1+|x|^2+|y|^2)|x-y|$$

Par une procédure d'extraction diagonale :

$$\alpha v^{\alpha,n,\varepsilon}(0) \to \lambda$$
$$v^{\alpha,n,\varepsilon}(x) - v^{\alpha,n,\varepsilon}(0) \underset{\varepsilon\to 0, n\to+\infty, \alpha\to 0}{\longrightarrow} v(x)$$

$$(Y_t^{x,\alpha,n,\varepsilon} - Y_0^{x,\alpha,n,\varepsilon}, Z_t^{x,\alpha,n,\varepsilon}, \alpha v^{\alpha,n,\varepsilon}(0)) \underset{\alpha\to 0,\, n\to+\infty,\, \varepsilon\to 0}{\longrightarrow} (Y_t, Z_t, \lambda)$$

Résultat

Théorème

Il existe une fonction localement Lipschitz v, $Z \in \mathscr{M}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ et un réel λ tel que, en définissant $Y_t^x := v(X_t^x)$, (Y^x, Z^x, λ) est une solution de l'EDSR ergodique avec condition de Neumann au bord nulle. De plus, $|v(x)| \leq C(1+|x|^2)$. $Z_t^x = \xi(X_t^x)$ and $|\xi(x)| \leq C(1+|x|^2)$.

Propriété

Unicité de λ.

Liens avec les EDPs

Problème initial

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t (d+b)(X_s^x)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\mathrm{d}W_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)\mathrm{d}K_s^x, \quad t \geq 0; \\ K_t^x = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^x \in \partial G\}}\mathrm{d}K_s^x, \quad K_\cdot^x \text{ is non decreasing;} \end{cases}$$

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda]\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \mathrm{d}W_s, \qquad 0 \leq t \leq T + \infty.$$

$$Y_t^x = v(X_t^x)$$

Théorème :

$$\begin{cases} \mathscr{L}v(x) + \psi(x, {}^t\nabla v(x)\sigma(x)) = \lambda, & x \in G, \\ \frac{\partial v}{\partial n}(x) = 0, & x \in \partial G, \end{cases}$$

où :

$$\mathscr{L}u(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma(x){}^t\sigma(x)\nabla^2 u(x)) + {}^tf(x)\nabla u(x).$$

EDSR ergodique avec condition de Neumann au bord

Problème résolu :

$$Y_t^{x,0} = Y_T^{x,0} + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^{x,0}) - \lambda^0] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{x,0} \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leq t \leq T + \infty$$

Problème à résoudre, μ est fixé

$$\begin{aligned} Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda] \mathrm{d}s &+ \int_0^t [g(X_s^x) - \mu] \mathrm{d}K_s^x \\ &- \int_t^T Z_s^x \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leq t \leq T + \infty \end{aligned}$$

$$\widehat{Y}_t^x := Y_t^{x,0} - \int_0^t [g(X_s^x) - \mu] \mathrm{d}K_s^x, \quad t \geq 0$$

$\Longrightarrow (\widehat{Y}^x, Z^{x,0}, \lambda^0)$ est solution de l'EDSR ergodique avec condition au bord.

EDSR ergodique avec condition de Neumann au bord

Problème à résoudre : λ est fixé

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T [\psi(X_s^x, Z_s^x) - \lambda]\mathrm{d}s + \int_0^t [g(X_s^x) - \mu]\mathrm{d}K_s^x - \int_t^T Z_s^x \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leq t \leq T + \infty$$

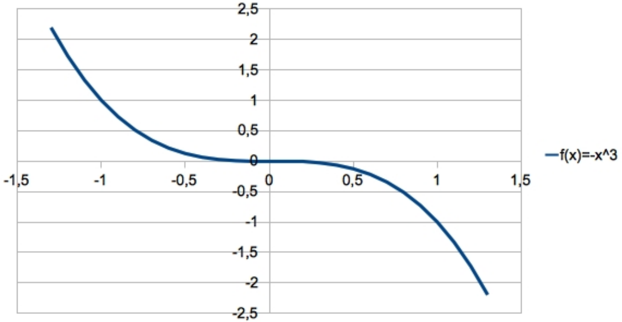
$$\widehat{Y}_t^x := Y_t^{x,0} + (\lambda - \lambda^0)t - \int_0^t [g(X_s^x) - \mu]\mathrm{d}K_s^x$$

$\Longrightarrow (\widehat{Y}^x, Z^0, \mu)$ est solution de l'EDSR ergodique avec condition au bord.

Un exemple en dimension 1

$$\begin{cases} X_t^x = x + \int_0^t f(X_s^x)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\mathrm{d}W_s + \int_0^t \nabla\phi(X_s^x)\mathrm{d}K_s^x, \quad t \geq 0; \\ K_t^x = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s^x \in \partial G\}}\mathrm{d}K_s^x, \quad K_\cdot^x \ \text{ est croissant}; \end{cases}$$

Si $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^3 \end{cases}$

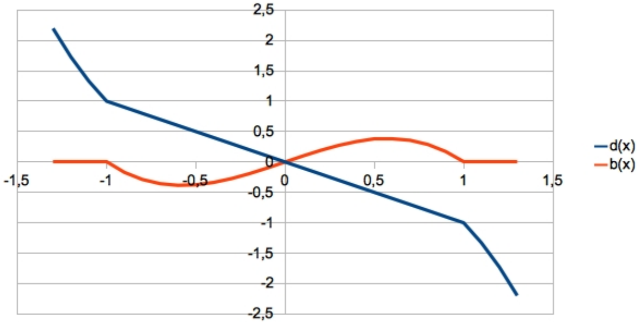


Un exemple en dimension 1

$$f(x) = d(x) + b(x).$$

où :

$$d(x) = -x^3 \mathbb{1}_{|x|\geq 1} - x\mathbb{1}_{|x|<1}$$
$$b(x) = -x^3 \mathbb{1}_{|x|<1} + x\mathbb{1}_{|x|<1}$$



Merci de votre attention

Références

M. Fuhrman, Y. Hu, G. Tessitore

Ergodic BSDEs and Optimal Ergodic Control in banach Spaces, 2007

A. Richou

Ergodic BSDEs and related PDEs with Neumann boundary conditions, 2009

A. Debussche, Y. Hu, G. Tessitore

Ergodic BSDEs under weak dissipative assumptions, 2010

J-L Menaldi, M Robin

Stochastic Variational Inequality for Reflected Diffusion, 1983

Scott Robertson, Hao Xing

Large time behavior of solutions to semi-linear equations with quadratic growth in the gradient, 2013