Symétries de l'équation de la chaleur rétrograde avec potentiel et modèles de taux d'intérêt

Hélène QUINTARD
travail en collaboration avec
Paul LESCOT (LMRS, Rouen) et
Jean-Claude ZAMBRINI (GFM, Lisbonne)

LMRS, Université de Rouen

8 avril 2014
JPS 2014
Forges-Les-Eaux

But : paramétrisation du modèle de taux d'intérêt affine à un paramètre

$$\mathrm{d}\, r(t) = \sqrt{\alpha r(t) + \beta}\, \mathrm{d}\, w(t) + (\phi - \lambda r(t))\, \mathrm{d}\, t$$

par un processus de Schrödinger, c'est à dire une diffusion satisfaisant

$$\mathrm{d}\, z(t) = \sqrt{\gamma}\, \mathrm{d}\, w(t) + \widetilde{B}(t, z(t))\, \mathrm{d}\, t, \tag{1}$$

avec

$$\widetilde{B}(t, q) = \gamma \frac{\partial}{\partial q} \ln \eta(t, q), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial q^2} + V\eta. \tag{3}$$

Définition

Un modèle de taux d'intérêt affine à un paramètre est caractérisé par le taux d'intérêt instantané $r(t)$ satisfaisant l'équation différentielle stochastique :

$$\mathrm{d}\, r(t) = \sqrt{\alpha r(t) + \beta}\, \mathrm{d}\, w(t) + (\phi - \lambda r(t))\, \mathrm{d}\, t \tag{4}$$

sous la probabilité de risque neutre $\mathbb{Q}$.

Théorème

Soit $r_0 \in \mathbb{R}$, l'équation :

$$\mathrm{d}\, r(t) = \sqrt{|\alpha r(t) + \beta|}\, \mathrm{d}\, w(t) + (\phi - \lambda r(t))\, \mathrm{d}\, t$$

a une unique solution forte telle que $r(0) = r_0$. De plus si $\alpha r_0 + \beta \geqslant 0$ alors $\alpha r(t) + \beta \geqslant 0$ et $r(t)$ est solution de (4).

Définition (Processus de Schrödinger entre μ_0 et μ_T (Thieullen, Zambrini, 1997))

$(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est un P.S. associé à* η *solution de (3) si :*

1. $X_t = X_0 + \int_0^t u(s, X_s)ds + \sqrt{\gamma} w_t$ *avec* $u = \gamma \frac{\partial}{\partial q} \ln \eta(t, q)$,
2. X_0 *(resp* X_T*) a pour loi* μ_0 *(resp* μ_T*),*
3. $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\frac{1}{2}|u(t, X_t)|^2 + V(t, X_t)\right] dt\right] < \infty$.

En particulier :

$$dX_t = \sqrt{\gamma} dw(t) + \widetilde{B}(z(t), t)dt \text{ où } \widetilde{B}(t, q) = \gamma \frac{\partial}{\partial q} \ln \eta(t, q).$$

$$\mathrm{d}\, r(t) = \sqrt{\alpha r(t) + \beta}\, \mathrm{d}\, w(t) + (\phi - \lambda r(t))\, \mathrm{d}\, t.$$

On pose :

$$X_t = \alpha r(t) + \beta,$$

$$\Rightarrow dX_t = \alpha \sqrt{X_t} dw(t) + (\alpha \widetilde{\phi} - \lambda X_t) dt$$

$$\text{où} \qquad \widetilde{\phi} = \phi + \frac{\lambda \beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{4\widetilde{\phi}}{\alpha}.$$

Théorème

1. $\delta \geqslant 2 \Rightarrow \forall t > 0, \quad X_t > 0,\ p.s..$
2. $\delta < 2 \Rightarrow \exists t > 0, \quad X_t = 0\ p.s..$

Soit $z(t) = \sqrt{X_t}$ et $T = \inf\{t > 0 | X_t = 0\}$.

Théorème

Il existe un processus de Schrödinger $y(t)$ tel que $\forall t \in [0, T[$, $z(t) = y(t)$.
Avec $y(t)$ est défini par :

$$\gamma = \frac{\alpha^2}{4}, \quad \eta(t,q) = \exp\left(\frac{\lambda\delta t}{4} - \frac{\lambda q^2}{\alpha^2}\right) q^{\frac{\delta-1}{2}}.$$

En particulier, η est solution de (3) avec :

$$V(t,q) = \frac{C}{q^2} + Dq^2,$$

$$\text{pour } C = \frac{\alpha^2}{128}(\delta-1)(\delta-3), \quad D = \frac{\lambda^2}{8}.$$

Soit :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial q^2} + V\eta.$$

On pose $S = -\gamma \ln \eta(t, q)$:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 - V - \frac{\gamma}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial q^2} = 0.$$

Soient :

$$S, \qquad E = -\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad B = -\frac{\partial S}{\partial q},$$

indépendantes de t et q et les unes des autres.
Système différentiel à annuler :

$$\begin{cases} \omega = B \,\mathrm{d}\, q + E \,\mathrm{d}\, t + \mathrm{d}\, S \\ \mathrm{d}\, \omega = \mathrm{d}\, B \,\mathrm{d}\, q + \mathrm{d}\, E \,\mathrm{d}\, t \\ \beta = (E + \frac{1}{2} B^2 - V) \,\mathrm{d}\, q \,\mathrm{d}\, t + \frac{\gamma}{2} \,\mathrm{d}\, B \,\mathrm{d}\, t \end{cases}$$

Soit I l'idéal différentiel engendré par ω, $\mathrm{d}\,\omega$, β.

Définition

*On appelle **isovecteur** un champ de vecteur N sur (t, q, S, E, B) tel que $\mathcal{L}_N(I) \subset I$. N est de la forme :*

$$N = N^t \frac{\partial}{\partial t} + N^q \frac{\partial}{\partial q} + N^S \frac{\partial}{\partial S} + N^E \frac{\partial}{\partial E} + N^B \frac{\partial}{\partial B}.$$

Théorème

Les isovecteurs forment une algèbre de Lie, notée $\mathcal{G}_V$.

Notation

On note $\mathcal{H}_V = \left\{ N \in \mathcal{G}_V \text{ tel que } \frac{\partial N^S}{\partial S} = 0 \right\}$.

Soit :

$$e^{\alpha N} : (t, q, S, E, B) \longmapsto (t_\alpha, q_\alpha, S_\alpha, E_\alpha, B_\alpha).$$

On pose :

$$\eta_\alpha(t_\alpha, q_\alpha) = e^{-\frac{1}{\gamma} S_\alpha}$$

et

$$e^{\alpha \widetilde{N}} : \eta(t, q) \longmapsto \eta_\alpha(t_\alpha, q_\alpha),$$

ce qui implique que :

$$\widetilde{N} = -N^t \frac{\partial}{\partial t} - N^q \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{\gamma} N^S. \tag{5}$$

Sous certaines conditions sur η et N.

Théorème (Lescot, Zambrini, '04)

Si $(X_t)_{t\in[t_0,t_1]}$ *est un processus de Schrödinger associé à* η *(stictement positive) de loi* $\mathbb{P}$*,*
alors $(X_t^\alpha)_{t\in[t_0^\alpha,t_1^\alpha]}$ *est aussi un processus de Schrödinger associé à* η_α *de loi* $\mathbb{P}^\alpha$ *telle que* $\dfrac{\mathrm{d}\mathbb{P}^\alpha}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \dfrac{\eta_\alpha}{\eta}$.
De plus il existe une relation entre X_t *et* X_t^α *donnée par la transformation* $e^{\alpha N}$.

Exemple (Lescot, Zambrini, '04)

Dans le cas de l'équation de la chaleur avec potentiel nul, on trouve pour $\widetilde{N} = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + qt \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{2\gamma}(q^2 - \gamma t)$ *:*

$e^{\alpha \widetilde{N}} \eta(t,q) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha t}} \exp\left(-\frac{\alpha q^2}{2\gamma(1-\alpha t)}\right) \eta\left(\frac{q}{1-\alpha t}, \frac{t}{1-\alpha t}\right)$,

$e^{\alpha N}(T,Q) = \left(\frac{Q}{1+\alpha T}, \frac{T}{1+\alpha T}\right)$.

Ce qui donne :

$$z^{\alpha}(t) = (1-\alpha t) z\left(\frac{t}{1-\alpha t}\right) \tag{6}$$

Pour $\eta = 1$, $z(t) = \sqrt{\gamma} w(t)$,

$$dz^{\alpha}(t) = \sqrt{\gamma} dw^{\alpha}(t) - \frac{\alpha z^{\alpha}(t)}{1-\alpha t} dt \tag{7}$$

$\Rightarrow$ *Pont brownien.*

On appelle $\mathcal{H}_{(C,D)} = \mathcal{H}_V$ pour $V(t,q) = \dfrac{C}{q^2} + Dq^2$.

Théorème (Dimension de l'algèbre)

1. *Pour* $C = 0$, $\mathcal{H}_{(C,D)}$ *est de dimension 6.*
2. *Pour* $C \neq 0$, $\mathcal{H}_{(C,D)}$ *est de dimension 4 et ne dépend pas de* C.
3. *Pour* $C \neq 0$, $\mathcal{H}_{(C,D)} \subsetneq \mathcal{H}_{(0,D)}$.
4. *Pour* $C = 0$, $\mathcal{H}_{(C,D)} \simeq \mathcal{H}_{(C,D')}$.
5. *Pour* $C \neq 0$, $\mathcal{H}_{(C,D)} \simeq \mathcal{H}_{(C,D')}$.

Théorème (Structure de l'algèbre)

1. *Si* $C = 0$, *l'algèbre des isovecteurs est isomorphe à* $sl(2) \ltimes H_3$.
2. *Si* $C \neq 0$, *l'algèbre des isovecteurs est isomorphe à* $\mathbb{R} \ltimes H_3$.

Cas $\delta = 1$

$z(t) = y(t)$ sur $[0, T[$ avec $y(t)$ solution de :

$$dy(t) = \frac{\alpha}{2} dw(t) - \frac{\lambda}{2} y(t) dt.$$

Donc $y(t)$ un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, dont on connaît la densité :

$$\rho_t(q) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\alpha \sqrt{2\pi(1 - e^{-\lambda t})}} \exp\left(-\frac{2\lambda(q - e^{-\frac{\lambda t}{2}} z_0)^2}{\alpha^2(1 - e^{-\lambda t})} \right) .$$

Cas $\delta = 3$

$z(t) = y(t)$ sur $[0, +\infty[$ avec $y(t)$ solution de

$$dy(t) = \frac{\alpha}{2} dw(t) + \left(\frac{\alpha^2}{4y(t)} - \frac{\lambda}{2} y(t) \right) dt.$$

Processus carré de Bessel de dimension 3 $\Rightarrow$ densité de $z(t)$:

$$\rho_t(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{16\lambda^{\frac{3}{2}}}{\alpha^3 (1 - e^{-\lambda t})^{\frac{3}{2}}} q^2 \exp\left(-\frac{2\lambda q^2}{\alpha^2 (1 - e^{-\lambda t})} \right).$$

1. Paramétrisation de modèles en dimension n (Heston, modèle affine n-dimensionnel ?).
2. Étude de la structure de l'algèbre des isovecteurs en dimension n et recherche des transformations.
3. Inversion du temps dans le brownien, $tw(\frac{1}{t})$ (transformation d'Appell ?).

Références

B. Kent Harrison and Frank B. Estabrook.
Geometric Approach to Invariance Groups and Solution of Partial Differential Systyems.
Journal Of Mathematical Physics, April 1971.

P. Lescot and H. Quintard.
Symmetries of the backward heat equation with potential and interest rate models.
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, À paraître, 2014.

P. Lescot, H. Quintard, and J.C. Zambrini.
Solving stochastic differential equations with cartan's exterior differential system.
En préparation.

P. Lescot and J-C. Zambrini.
Isovectors for the Hamilton-Jacobi-Bellman equation, formal stochastic differentials and first integrals in euclidian quantum mechanics.
Progress in Probability, 2004.

P. Lescot and J-C. Zambrini.
Probabilistic Deformation of contact geometry, diffusion processes and their quadratures.
Progress in Probability, 2007.

M. Thieullen and J.-C. Zambrini.
Probability and quantum symmetries i. The Thoerem of Noether in Schröedinger's Euclidian Quantum Mechanics.
Annales de l'IHP (Phyique Théorique), 1997.