Quelques résultats de divisibilité infinie

Pierre Bosch

Université Lille 1

JPS

Introduction

Questions posées au début de ma thèse :

- La loi de γ_t^{-a} est-elle infiniment-divisible ?
- Les densités des lois α-stables sont-elles HCM ?

Loi infiniment divisible

n-divisibilité

La variable aléatoire X est *n-divisible* s'il existe $(X_1 \ldots X_n)$ i.i.d. tel que

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + \cdots + X_n.$$

Évidemment, poser $X_i = X/n$ ne convient pas.

Divisibilité infinie

La variable aléatoire X est *infiniment divisible* (**ID**) si elle est n-divisible pour tout n.

Exposant de Lévy-Khintchine

X est **ID** ssi il existe un triplet (a, σ, μ) tel que

$$\mathbb{E}\left(e^{iuX}\right) = \exp\left(iau - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{iux} - 1 - iu\tau(x))\mu(dx)\right)$$

où $\tau(x) = x/(1+x^2)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}(1 \wedge x^2)\mu(dx) < \infty$.

X est **ID** ssi il existe un processus de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que $X_1 \stackrel{\mathrm{d}}{=} X$.

Soit X une variable positive.

Exposant de Lévy-Khintchine

X est **ID** ssi il existe un couple (a, μ) tel que

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X}\right) = \exp\left(-a\lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\mu(dx)\right)$$

où $\int_0^\infty (1 \wedge x)\mu(dx) < \infty$.

X est **ID** ssi il existe un processus de Lévy p.s. croissant $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que $X_1 \overset{\mathrm{d}}{=} X$.

Exemples faciles

ID

- Loi Gaussienne ;
- Loi de Poisson ;
- Loi Exponentielle, Gamma ;
- Loi Géométrique, Binomiale négative ;
- Loi de Cauchy ;
- X^2 où $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Non **ID**

- Loi binomiale ;
- Loi uniforme ;
- Toute loi (non triviale) à support compact.

Exemples moins faciles

ID

- Loi de Pareto ($x \mapsto c_a/(1+x)^{a+1}$) ;
- Loi de Gumbel ($X = -\log(L)$ où $L \sim \mathrm{Exp}(1)$) ;
- Loi demi-Cauchy ($X = |C|$ où $C \sim 1/\pi(1+x^2)$) ;
- X^2 où $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$;
- $\sqrt{L_1 L_2}$ où $L_1 \perp L_2 \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Non **ID**

- $\sqrt{L}$ où $L \sim \mathrm{Exp}(1)$;
- $|X|$ où $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Opération sur les lois ID

Addition, Multiplication, Inverse

- $X \perp Y$ **ID** $\Rightarrow aX + bY$ **ID** ;
- $X \perp Y$ **ID** $\not\Rightarrow X \times Y$ **ID** ;
- X **ID** $\not\Rightarrow 1/X$ **ID**.

Subordination de Bochner

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un subordinateur et $(Y_x)_{x\geq 0}$ un processus de Lévy indépendant de (X_t). Alors $(Y_{X_t})_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy.

Application à la loi de Student

Soient $(B_x)_{x\geq 0}$ le mouvement brownien standard et $(X_t)_{t\geq 0}$ un subordianteur. Par auto-similarité $\sqrt{X_1}B_1$ est **ID**.

Grosswald (1976)

La loi de Student est **ID**.

C'est une conséquence du fait que :

- $\forall\alpha > 0$, γ_α^{-1} est **ID** ;
- $T_n \overset{\mathrm{d}}{=} c \times \dfrac{X}{\sqrt{\gamma_{n/2}}}$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Fonction Complètement Monotone (**CM**)

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ est **CM** si $\forall n \geq 0,\ (-1)^n f^{(n)} \geq 0$.

Fonction Hyperboliquement Complètement Monotone (**HCM**)

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ est **HCM** si $\forall u > 0$, $w \mapsto f(uv)f(u/v)$ est **CM** en $w = v + v^{-1}$.

Exemples : $f(x) = x^a$, $f(x) = e^{-ax}$, $f(x) = 1/(x+a)^b$, $b \geq 0$, $f(x) = g(x^a)$ avec $|a| \leq 1$ et g **HCM**, etc.

Densité Hyperboliquement Complètement Monotone

Fonction Complètement Monotone (CM)

$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ est **CM** si $\forall n \geq 0,\ (-1)^n f^{(n)} \geq 0$.

Fonction Hyperboliquement Complètement Monotone (HCM)

$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ est **HCM** si $\forall u > 0$, $w \mapsto f(uv)f(u/v)$ est **CM** en $w = v + v^{-1}$.

Exemples : $f(x) = x^a$, $f(x) = e^{-ax}$, $f(x) = 1/(x+a)^b$, $b \geq 0$, $f(x) = g(x^a)$ avec $|a| \leq 1$ et g **HCM**, etc.

Proposition

Une fonction **HCM** se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Propriété des variables **HCM**

Addition, Multiplication, Inverse, Puissance

- $X \perp Y$ **HCM** $\not\Rightarrow X + Y$ **HCM** ;
- X **HCM** $\Rightarrow 1/X$ **HCM** ;
- $X \perp Y$ **HCM** $\Rightarrow X \times Y$ et X/Y **HCM** ;
- X **HCM** $\Rightarrow X^c$ **HCM**, $|c| \geq 1$.

Inclusion dans la classe des lois infiniment divisibles

$$\mathbf{HCM} \subset \mathbf{ID}.$$

Exemple : $\gamma_t \sim \Gamma(t)^{-1} x^{t-1} e^{-x}$ est **HCM**.

Infinie divisibilité des puissances d'une variable Gamma

- γ_t^c est **HCM** donc **ID** lorsque $|c| \geq 1$;
- γ_t^c est non **ID** lorsque $c \in (0,1)$ car les queues de distributions sont trop légères :

$$\mathbb{P}\left(\gamma_t^c > x\right) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_{x^{1/c}}^{\infty} u^{t-1} e^{-u} du \lesssim e^{-x^{1/c}/2}.$$

Théorème (2013)

γ_t^c est **ID** lorsque $c \in (-1,0)$.

Infinie divisibilité des puissances d'une variable Gamma

- γ_t^c est **HCM** donc **ID** lorsque $|c| \geq 1$;
- γ_t^c est non **ID** lorsque $c \in (0,1)$ car les queues de distributions sont trop légères :

$$\mathbb{P}\left(\gamma_t^c > x\right) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_{x^{1/c}}^{\infty} u^{t-1} e^{-u} du \lesssim e^{-x^{1/c}/2}.$$

Théorème (2013)

γ_t^c est **ID** lorsque $c \in (-1,0)$.

Pour $c \in (-1,0)$, on écrit γ_t^c comme une fonctionnelle exponentielle

$$\gamma_t^c \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_0^{\infty} e^{-Y_s} ds$$

où (Y_s) est un processus de Lévy spectralement négatif qui dérive vers $+\infty$.

Un problème sur les densités **HCM**

Pour $\alpha \in (0,1)$ on considère Z_α une variable (strictement) α-stable définie par $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda Z_\alpha}\right) = e^{-\lambda^\alpha}$.
Z_α est **ID**.

Conjecture (Bondesson)

Z_α est **HCM** ssi $\alpha \leq 1/2$.

Le cas $\alpha = 1/n$ ($n \geq 2$) :

$$Z_{1/n} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{n^n}{\gamma_{1/n} \times \cdots \times \gamma_{(n-1)/n}}.$$

Réponse partielle

$\forall n \geq 2$, $Z_{1/n}$ est **HCM**.

Un problème sur les densités **HCM**

Le cas $\alpha = 1/3$:

$$Z_{1/3}^{-1} \stackrel{\mathrm{d}}{=} c \times \gamma_{1/3} \times \gamma_{2/3}.$$

Proposition (2014)

$\sqrt{\gamma_t \times \gamma_s}$ est **HCM** (donc **ID**) si $|t - s| \leq 1/2$.

Plus précisément $\sqrt{\gamma_t \times \gamma_s}$ est **HCM** ssi $|t - s| \leq 1/2$.
Donc $Z_{1/3}^{1/2}$ est **HCM**.

Rapport indépendant de deux variables α-stables

$T_\alpha = \left(Z_\alpha/\tilde{Z}_\alpha\right)^\alpha$ a une densité explicite :

Lien avec la loi de Cauchy

$$T_\alpha \sim \frac{\sin(\alpha\pi)/(\alpha\pi)}{x^2 + 2\cos(\alpha\pi)x + 1}.$$

Proposition

$\forall\alpha \in [0, 1/2]$, $\forall|\beta| \geq 1$, T_α^β est **ID**.

Conséquence du fait que $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$ est une fonction **CM** et du théorème suivant :

Kristiansen (1994)

Si $X \geq 0$ se factorise en $X \overset{\mathrm{d}}{=} Y \times \gamma_2$ avec $\gamma_2 \perp Y$, alors X est **ID**.

Rapport indépendant de deux variables α-stables

Deux cas particuliers :

- $T_{1/2} \sim \frac{2}{\pi(x^2+1)}$.
  $T_{1/2}^{\gamma}$ est **HCM** ssi $\gamma \geq 2$. C'est-à-dire, $(Z_{1/2}/\tilde{Z_{1/2}})^{\beta}$ est **HCM** ssi $\beta \geq 1$.
- $T_{1/3} \sim \frac{c}{x^2+x+1}$.
  On sait que $(Z_{1/3}/\tilde{Z_{1/3}})^{1/2}$ est **HCM**, ie. $x \mapsto \frac{1}{x^{4/3}+x^{2/3}+1}$ est une fonction **HCM**.

Théorème (2014)

$(Z_\alpha/\tilde{Z}_\alpha)^{\beta}$ est **HCM** ssi $\alpha \leq 1/2$ et $|\beta| \geq \alpha/(1-\alpha)$.

Conjecture de Bondesson renforcée

Z_α^{β} est **HCM** ssi $\alpha \leq 1/2$ et $|\beta| \geq \alpha/(1-\alpha)$.

Quelques éléments de démonstration

Théorème

Une fonction $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ est **HCM** ssi elle est la transformée de Laplace d'une loi **GGC**.

$$\{\text{Lois } \textbf{GGC}\} = \overline{\{\text{Covolutions de lois } \Gamma\}}$$

Théorème

X est **GGC** ssi $\Phi : \lambda \mapsto \mathbb{E}\left(e^{-\lambda X}\right)$ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, ne s'annule pas et vérifie

$$\mathrm{Im}(z) > 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\Phi'(z)\overline{\Phi(z)}) \geq 0.$$

Merci pour votre attention !