Mouvement brownien sur les groupes de Lie compacts de grande dimension

Antoine Dahlqvist

Technische Universität Berlin

7 avril 2014

Onzième colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens

Soit G un groupe de Lie.

Définition

Un mouvement brownien à droite sur G est un processus $(Z_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans G, vérifiant les conditions suivantes :

1. *Pour toute suite ordonnée de réels $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$, les variables aléatoires $(Z_{t_i}^{-1} Z_{t_{i+1}})_{0\leq i\leq n}$ sont indépendantes et $Z_{t_1}^{-1} Z_{t_2}$ a même loi que $Z_{t_2 - t_1}$.*
2. *Presque sûrement, la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto Z_t \in G$ est continue.*

Exemple ($G = \mathrm{U}(1)$)

Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est mouvement brownien standard, $(e^{iB_t})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien (à gauche et à droite) sur $\mathrm{U}(1)$.

G : un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G.

$(K_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $\mathfrak{g}$, $(Z_t)_{t\geq 0}$ la solution forte de l'EDS

$$dZ_t = Z_t \circ dK_t = Z_t dK_t + \frac{1}{2} Z_t \langle dK_t . dK_t \rangle,$$
$$Z_0 = \mathrm{Id}.$$

Lemme

$$\mathbb{P}\left(\forall t \geq 0, Z_t \in G\right) = 1.$$

Le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien à droite sur G.

Exemple ($G = \mathrm{U}(1)$)

Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est mouvement brownien standard, $(U_t)_{t\geq 0} = (e^{iB_t})_{t\geq 0}$ vérifie

$$dU_t = U_t i dB_t - \frac{U_t dt}{2}.$$

On considère les trois séries de groupes compacts classiques :

$$\mathrm{O}(N) = \{O \in M_N(\mathbb{R}) : O^t O = \mathrm{Id}\},$$

$$\mathrm{U}(N) = \{U \in M_N(\mathbb{C}) : U^* U = \mathrm{Id}\} \text{ et}$$

$$\mathrm{Sp}(2N) = \{S \in \mathrm{U}(2N) : J^{-1} S^t J S = \mathrm{Id}\}, \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix},$$

d'algèbres de Lie respectives

$$\mathfrak{o}(N) = \{X \in M_N(\mathbb{R}) : X^t + X = 0\},$$

$$\mathfrak{u}(N) = \{X \in M_N(\mathbb{C}) : X^* + X = 0\} \text{ et}$$

$$\mathfrak{sp}(2N) = \{X \in \mathfrak{u}(2N) : J^{-1} X^t J + X = 0\}.$$

On définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $M_N(\mathbb{C})$ en posant

$$\langle X, Y \rangle = N\mathrm{Tr}(X^* Y).$$

$\mathfrak{g}_N$: une des trois algèbres de Lie ci-dessus,
$(K_t)_{t\geq 0}$: le processus gaussien sur $\mathfrak{g}_N$ tel que

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}_N, \quad \mathbb{E}[\langle X, K_t \rangle \langle Y, K_s \rangle] = t \wedge s \ \langle X, Y \rangle.$$

$\mathfrak{u}(N)$: [i. GUE]

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \ddots & & Y_{l,m,t} \\ & iB_{p,t} & \\ -\overline{Y_{l,m,t}} & & \ddots \end{pmatrix},$$

$(Y_{l,m,t})_{l<m,t\geq 0}$: browniens standards complexes.
$(B_{p,t})_{p,t\geq 0}$: browniens standards réels.
Ces processus sont indépendants.

On définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $M_N(\mathbb{C})$ en posant

$$\langle X, Y \rangle = N\mathrm{Tr}(X^* Y).$$

$\mathfrak{g}_N$: une des trois algèbres de Lie ci-dessus,
$(K_t)_{t\geq 0}$: le processus gaussien sur $\mathfrak{g}_N$ tel que

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}_N, \quad \mathbb{E}[\langle X, K_t \rangle \langle Y, K_s \rangle] = t \wedge s \, \langle X, Y \rangle.$$

$\mathfrak{u}(N)$: [i. GUE]

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \ddots & & Y_{l,m,t} \\ & iB_{p,t} & \\ -\overline{Y_{l,m,t}} & & \ddots \end{pmatrix},$$

$(Y_{l,m,t})_{l<m,t\geq 0}$: browniens standards complexes.
$(B_{p,t})_{p,t\geq 0}$: browniens standards réels.
Ces processus sont indépendants.

Le mouvement brownien $(Z_t)_{t\geq 0}$ vérifie

- Groupes orthogonaux :

$$dZ_t = Z_t dK_t - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{N})Z_t dt.$$

- Groupes symplectiques :

$$dZ_t = Z_t dK_t - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2N})Z_t dt.$$

- Groupes unitaires :

$$dZ_t = Z_t dK_t - \frac{1}{2}Z_t dt.$$

$(Z_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien sur un groupe compact classique
Mesure spectrale d'une marginale :

$$\mu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{\lambda \text{ vp } Z_t} \delta_\lambda.$$

Moments : $\int_{\mathbb{U}} w^n \mu_t^N(dw) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(Z_t^n),\ n \in \mathbb{Z}.$

Théorème (P. Biane, F. Xu, T. Lévy)

Pour tout $t \geq 0$,

$$\mu_t^N \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu_t,$$

faiblement, μ_t : mesure déterministe sur $\mathbb{U}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(Z_t^n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{|n|} \sum_{k=0}^{|n|-1} \frac{(-|n|t)^k}{k!} \binom{|n|}{k+1} e^{\frac{-|n|t}{2}}.$$

$(Z_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien sur un groupe compact classique
Mesure spectrale d'une marginale :

$$\mu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{\lambda \text{ vp } Z_t} \delta_\lambda.$$

Moments : $\int_{\mathbb{U}} w^n \mu_t^N(dw) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(Z_t^n),\ n \in \mathbb{Z}.$

Théorème (P. Biane, F. Xu, T. Lévy)

Pour tout $t \geq 0$,

$$\mu_t^N \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu_t,$$

faiblement, μ_t : mesure déterministe sur $\mathbb{U}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(Z_t^n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{|n|} \sum_{k=0}^{|n|-1} \frac{(-|n|t)^k}{k!} \binom{|n|}{k+1} e^{\frac{-|n|t}{2}}.$$

La mesure μ_t admet une densité ρ_t par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{U}$. Transition au temps t=4 :

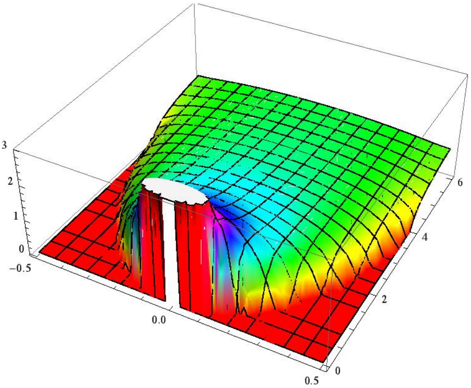

FIGURE: Tracé de $\rho_t(e^{2i\pi\theta})$, en abscisse l'angle paramétré par $\theta \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, en ordonnée le temps $t \in [0, 6]$.

Pour tout $t \geq 0$,

$$S_t^N = \mathrm{Spec}(Z_t),$$

$$S_t = \mathrm{supp}(\mu_t),$$

pour $\varepsilon > 0$,

$$S_t^\varepsilon = \{x \in \mathbb{U} : d(x, S_t) \leq \varepsilon\}.$$

Théorème (A. D., B. Collins,T.Kemp)

$\forall t \geq 0, \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(S_t^N \subset S_t^\varepsilon\right) \to 1, \; quand \; N \to \infty.$$

Valeurs propres d'un mouvement brownien unitaire :

$$C_N = \{(\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \mathbb{U}^N : \theta_N - 2\pi < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_N\}.$$

Proposition

P.s., pour tout $t > 0$, $\theta_t \in C_N$ et $(\theta_t)_{t\geq 0}$ est solution de l'EDS

$$d\theta_{p,t} = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_{p,t} + \frac{1}{N} \sum_{q \neq p} \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta_{p,t} - \theta_{q,t}}{2}\right) dt, \ 1 \leq p \leq N \quad \text{(Dyson unitaire)}$$

avec pour condition initiale $\theta_0 = 0$ et où $(B_{t,p})_{t\geq 0, 1\leq p\leq N}$ sont N mouvements browniens standards i.i.d.

Répulsion entre les valeurs propres : la normalisation n'est pas celle d'un théorème central limite classique, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=1}^{N} (e^{in\theta_p} - \mu_t(z^n)) \to 0.$$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X, X^{-1}]$,

$$\begin{aligned} \Delta_t^N(P) &= \sum_{\lambda \text{ vp } Z_t} (P(\lambda) - \mu_t(P)) \\ &= \mathrm{Tr}(P(Z_t)) - N\mu_t(P). \end{aligned}$$

Répulsion entre les valeurs propres : la normalisation n'est pas celle d'un théorème central limite classique, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=1}^{N} (e^{in\theta_p} - \mu_t(z^n)) \to 0.$$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X, X^{-1}]$,

$$\begin{aligned} \Delta_t^N(P) &= \sum_{\lambda \text{ vp } Z_t} (P(\lambda) - \mu_t(P)) \\ &= \mathrm{Tr}(P(Z_t)) - N\mu_t(P). \end{aligned}$$

Pour $P \in \mathbb{R}[X, X^{-1}]$,

$$\Delta_t^N(P) = \mathrm{Tr}(P(Z_t)) - N\mu_t(P).$$

Théorème (T. Lévy et M. Maïda, A.D.)

La famille $(\Delta_t^N(P))_{t\geq 0, P\in\mathbb{R}[X,X^{-1}]}$ *converge en loi vers un vecteur gaussien*

- $\mathrm{U}(N)$ *: complexe centré* $(\psi_t(P))_{t\geq 0, P\in\mathbb{R}[X,X^{-1}]}$.
- $\mathrm{O}(N)$ *: réel non centré* $\left(m_t(P) + \sqrt{2}\mathrm{Re}\,(\psi_t(P))\right)_{t\geq 0, P\in\mathbb{R}[X,X^{-1}]}$.
- $\mathrm{Sp}(2N)$ *: réel non centré* $\left(-m_t(P) + \sqrt{2}\mathrm{Re}\,(\psi_t(P))\right)_{t\geq 0, P\in\mathbb{R}[X,X^{-1}]}$.

Antoine Dahlqvist.
Gaussian planar master fields.
in preparation.

T. Lévy and M. Maïda.
Central limit theorem for the heat kernel measure on the unitary group.
ArXiv e-prints, May 2009.

Thierry Lévy.
The master field on the plane.
ArXiv e-prints, December 2011.

Merci