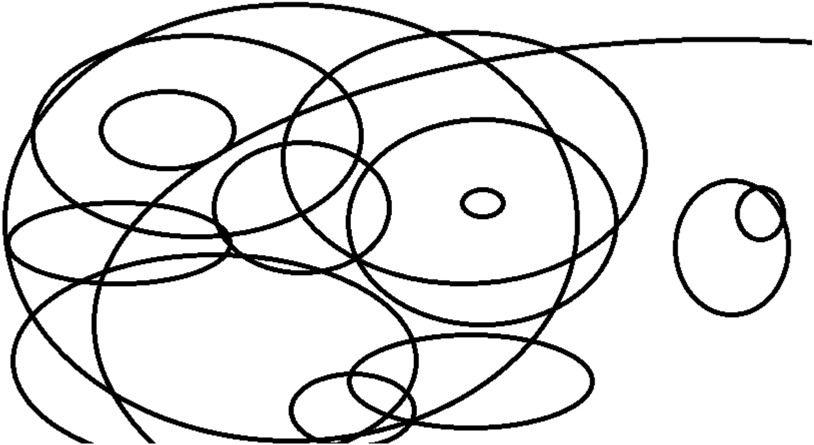
Modèle de Boules Aléatoires Inhomogènes

Renan GOBARD [1]

Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens

7 avril 2014

1. IRMAR, Université de Rennes 1.



Rappel : Mesure aléatoire de Poisson.

Une **mesure aléatoire de Poisson** N sur E est une mesure ponctuelle telle que :

- $\forall A \in \mathcal{B}(E),\ N(A) \sim \mathcal{P}(\mu(A))$,
- $\forall A, B \in \mathcal{B}(E),\ N(A) \amalg N(B)$.

La mesure μ (déterministe) est appelée **intensité** de la mesure aléatoire.

L'ensemble des atomes de N est un **processus ponctuel de Poisson** d'intensité μ.

On s'intéresse à un modèle de boules aléatoires pondérées dans $\mathbb{R}^d$.
On se donne donc un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $F_x(dr)dxG(dm) = f(x,r)dxdrG(dm)$, avec, uniformément en x :

$$f(x,r) \sim_{r\to+\infty} \frac{g(x)}{r^{\beta(x)+1}}.$$

- $\int_{\mathbb{R}^+} r^d \|f(\cdot,r)\|_\infty dr < +\infty$: volume moyen fini
- $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$: "densité des centres"
  $\hookrightarrow$ **inhomogénéité**
- $d < \beta_1 < \beta(x) < \beta_2$: "index de queue lourde des rayons"
  $\hookrightarrow$ **dépendance rayons/emplacements**
- $G \sim S_\alpha(\sigma, b, \tau)$, $\alpha \in (1,2]$.

On souhaite étudier la masse générée par le système de boules. La masse en un point y de $\mathbb{R}^d$ est donnée par :

$$M(y) = \sum_i M_i 1_{B(X_i, R_i)}(y),$$

où (X_i, R_i, M_i) est le processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $f(x, r)dxdrG(dm)$.

On peut aussi regarder la masse induite par le réseau sur un ensemble mesurable A :

$$M(A) = \sum_i M_i |A \cap B(X_i, R_i)|.$$

En identifiant l'ensemble A avec la mesure $|A \cap \cdot|$, on peut étendre le processus M à toutes les mesures sur $\mathbb{R}^d$ et l'exprimer sous forme intégrale :

$$M(\mu) = \sum_i M_i \mu(B(X_i, R_i)) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} m\mu(B(x, r)) N(dx, dr, dm),$$

où N est la mesure ponctuelle de Poisson associée au processus ponctuel de Poisson (X_i, R_i, M_i).

Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1 = \left\{\mu; |\mu|(\mathbb{R}^d) < +\infty\right\}$, $\mathbb{E}\left[|M(\mu)|\right] < +\infty$.

On souhaite maintenant étudier le processus M à un niveau macroscopique. Pour cela on effectue un "dézoom" en réduisant les rayons. Mathématiquement, on effectue le changement de variable $r \mapsto \rho r$ et on fait tendre ρ vers 0 :

$$f(x,r) \mapsto f(x, r/\rho) \sim \frac{g(x)}{r^{\beta(x)+1}} \rho^{\beta(x)} \to_{\rho \to 0} 0.$$

Pour obtenir quelque chose de significatif à la limite, on doit augmenter le nombre de centres. On utilise donc la densité f_ρ telle que :

$$f_\rho(x,r) \sim \frac{\lambda(\rho) g(x)}{r^{\beta(x)+1}},$$

avec $\lambda(\rho) \to +\infty$ quand $\rho \to 0$.

On étudie donc le processus :

$$M_\rho(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} m\mu(B(x,r)) N_\rho(dx, dr, dm),$$

où N_ρ est une mesure ponctuelle de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $f_\rho(x, r/\rho) dx \frac{dr}{\rho} G(dm)$.

Plus précisément, on étudie les variations du processus M_ρ autour de sa moyenne :

$$\widetilde{M}_\rho(\mu) = M_\rho(\mu) - \mathbb{E}\left[M_\rho(\mu)\right] = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} m\mu(B(x,r)) \widetilde{N}_\rho(dx, dr, dm),$$

où $\widetilde{N}_\rho(dx, dr) = N_\rho(dx, dr, dm) - f_\rho(x, r/\rho) dx \frac{dr}{\rho} G(dm)$ est une mesure ponctuelle de Poisson compensée d'intensité $f_\rho(x, r/\rho) dx \frac{dr}{\rho} G(dm)$.

Lorsque ρ tend vers 0 (et donc $\lambda(\rho)$ vers $+\infty$) trois régimes limites différents apparaissent. Pour comprendre ce phénomène, regardons le nombre moyen de boules contenant 0 de volume supérieur à 1 :

$$\int \int_{\{(x,r):0\in B(x,r),r>1\}} \rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx dr = \mathcal{O}(\lambda(\rho)\rho^{\beta_1}).$$

Les trois régimes dépendent du comportement de $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1}$.

Les résultats obtenus sont des résultats de convergence des lois fini-dimensionnelles. Ils ne sont obtenus que pour une sous-classe de $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_{\alpha,\beta_1,\beta_2} =$

$$\left\{ \mu \in \mathcal{M}_1 ; \int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x,r))|^\alpha dx \le C(r^s \wedge r^t); s < \beta_1 \le \beta_2 < t \right\}.$$

L'outil principal pour établir ces convergences est la fonction caractéristique du processus :

$$\mathbb{E}\left[e^{i\theta \widetilde{M}_\rho(\mu)}\right] = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^+} \psi\left(\theta\mu(B(x,r))\right) f_\rho(x, r/\rho) dx \frac{dr}{\rho} G(dm) \right)$$

où $\psi(u) = e^{iu} - 1 - iu$.

On obtient les résultats suivants :

Théorème

Quand $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1} \to +\infty$, *pour tout* $\mu \in \mathcal{M}_{\alpha,\beta_1,\beta_2}$:

$$\frac{\widetilde{M}_\rho(\mu)}{(\lambda(\rho)\rho^{\beta_1})^{1/\alpha}} \longrightarrow Z(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^+} \mu(B(x,r))M_\alpha(dx,dr),$$

où M_α *est une mesure aléatoire* α*-stable de mesure de contrôle* $g(x)1_{B_1}(x)r^{-1-\beta_1}dxdr$ *et de paramètres d'asymétrie* b.

Théorème

Quand $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1} \to c > 0$, *pour tout* $\mu \in \mathcal{M}_{\alpha,\beta_1,\beta_2}$:

$$M_\rho(\mu) \longrightarrow J_c(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} m\mu(B(x,r))\widetilde{N}_c(dx,dr,dm),$$

où $\widetilde{N}_c$ *est une mesure aléatoire de Poisson compensée d'intensité* $cg(x)1_{B_1(x)}dxr^{-1-\beta_1}drG(dm)$.

Théorème

Supposons $\beta_2 < \alpha d$ et posons $\gamma = \beta_1/d$. Quand $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1} \to 0$, pour tout $\mu(dx) = \phi(x)dx$ avec $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$:

$$\frac{\widetilde{M}_\rho(\mu)}{(\lambda(\rho)\rho^{\beta_1})^{1/\gamma}} \longrightarrow L(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) L_\gamma(dx),$$

où L_γ est une mesure aléatoire γ-stable sur $\mathbb{R}^d$ de mesure de contrôle $\sigma_\gamma 1_{B_1}(x)g(x)dx$ et de paramètre d'asymétrie β_γ.

σ_γ et β_γ dépendent de la loi des poids G.

Les processus limites obtenus jouissent de propriétés intéressantes :

- lorsque g est radiale et B_1 est invariant par rotation, ils sont isotropes,
- s'il existe H telle que, pour tout $a > 0$, $g(a\cdot) = a^H g$, Z et L sont auto-similaires d'index $(H + d - \beta_1)/\alpha$ et $(H + d - \beta_1)/\gamma$.
- Le processus Z présente de la dépendance en "espace-long", contrairement au processus L.

Le processus J_c réalise un pont poissonnien entre les processus Z et L. C'est à dire :

$$\frac{J_c(\mu)}{c^{1/\alpha}} \longrightarrow_{c\to+\infty} Z(\mu), \text{ pour } \mu \in \mathcal{M}_{\alpha,\beta_1,\beta_2},$$

et

$$\frac{J_c(\mu)}{c^{1/\gamma}} \longrightarrow_{c\to 0} L(\mu), \text{ pour } \mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d).$$

Merci de votre attention.