Densité des temps d'atteinte pour des processus de Lévy stables

Julien Letemplier
En collaboration avec T. Simon
Université Lille 1

Colloque jeunes probabilistes et statisticiens

8 avril 2014

Plan

Définition

La loi d'une variable aléatoire X est dite stable si $\forall n \geq 1$ il existe $a_n > 0$ et b_n réels, $X_1, ..., X_n$ copies i.i.d de X telles que :

$$S_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$$

avec $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Si $b_n = 0 \ \forall n$, la loi est dite strictement stable.

Théorème

- *Seule la constante $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ est possible,* $0 < \alpha \leq 2$. α *est appelé l'exposant caractéristique de la loi.*

Définition

La loi d'une variable aléatoire X est dite stable si $\forall n \geq 1$ il existe $a_n > 0$ et b_n réels, $X_1, ..., X_n$ copies i.i.d de X telles que :

$$S_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$$

avec $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Si $b_n = 0 \ \forall n$, la loi est dite strictement stable.

Théorème

- *Seule la constante* $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ *est possible,* $0 < \alpha \leq 2$. α *est appelé l'exposant caractéristique de la loi.*
- *Les lois stables sont infiniment divisibles.*

Rappel :
D'après le théorème de Lévy-Khintchine, si X v.a infiniment divisible il existe une mesure Λ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 \wedge |x|^2) d\Lambda(x) < \infty,$$

et des constantes réelles $a \geq 0$ et b telles que :

$$\mathbb{E}\left(e^{i\lambda X}\right) = \exp(ib\lambda - \frac{1}{2}a\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbb{1}_{[0,1]}(x)) d\Lambda(x)).$$

Une telle mesure est appelée mesure de Lévy.

Théorème

-Une loi est 2-stable ssi c'est une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$*.*
-Soit $0 < \alpha \leq 2$*. Une loi est* α*-stable ssi elle a pour mesure de Lévy :*

$$\frac{d\Lambda(x)}{dx} = \left\{ \begin{array}{l} c_+ x^{-1-\alpha}, x > 0, \\ c_- |x|^{-1-\alpha}, x < 0 \end{array} \right\}.$$

et a=0.
-Soit $0 < \alpha \leq 2$*.*
Une loi est α*-stable ssi sa fonction caractéristique est de la forme*

$$\phi(t) = \left\{ \begin{array}{l} \exp(i\mu t - \gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) sgn(t))), \alpha \neq 1 \\ \exp(i\mu t - \gamma |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi}) sgn(t) log(|t|)), \alpha = 1 \end{array} \right\}.$$

avec $-1 \leq \beta \leq 1$ *et* $-\infty < \mu < +\infty$*.*

Cas particuliers :

1)-Cas spectralement positif : Sa mesure de Lévy est concentrée sur $(0, \infty)$:

$$d\Lambda(x) = cx^{-\alpha-1}dx \;\; x > 0,$$

avec $c > 0$ et $\alpha \in (1, 2)$.

Cas particuliers :

1)-Cas spectralement positif : Sa mesure de Lévy est concentrée sur $(0,\infty)$:

$$d\Lambda(x) = cx^{-\alpha-1}dx \ \ x > 0,$$

avec $c > 0$ et $\alpha \in (1,2)$.

2)-Cas positif :

$$X > 0 \text{ p.s ssi } 0 < \alpha < 1, \ \beta = 1 \text{ et } \mu \geq 0$$

.

Pour une loi α-stable X, on définit le *paramètre de positivité* : $\rho = \mathbb{P}(X \geq 0)$.

Remarque

On peut d'ores et déjà faire les remarques suivantes :
1)-Cas spectralement positif : $\rho = 1 - \frac{1}{\alpha}$. Cas spectralement négatif, $\rho = \frac{1}{\alpha}$.
2)-Cas positif : $\rho = 1$. Cas négatif $\rho = 0$.

Définition

On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy issu de 0 si :

1. $X_0 = 0$ $p.s$,
2. X est à accroissement indépendants et stationnaires,
3. X est stochastiquement continu.

Définition

On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy issu de 0 si :

1. $X_0 = 0$ $p.s$,
2. X est à accroissement indépendants et stationnaires,
3. X est stochastiquement continu.

On a équivalence entre la notion de processus de Lévy et celle d'infini divisibilité.

Conséquences : La fonction caractéristique de X_1 peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_1}\right) &= \exp(ib\lambda - \frac{1}{2}a\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda \mathbb{1}_{[0,1]}(x))d\Lambda(x)) \\ &= e^{-\Psi(\lambda)}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_t}\right) = e^{-t\Psi(\lambda)}$$

Cas des processus stables :

Définition

Un processus stochastique $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a la propriété d'autosimilarité d'indice $\frac{1}{\alpha} > 0$ si $\forall k > 0$ $(Y_{kt})_{t\geq 0}$ a même loi que $(k^{\frac{1}{\alpha}} Y_t)_{t\geq 0}$.

Cas des processus stables :

Définition

Un processus stochastique $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a la propriété d'autosimilarité d'indice $\frac{1}{\alpha} > 0$ si $\forall k > 0$ $(Y_{kt})_{t\geq 0}$ a même loi que $(k^{\frac{1}{\alpha}} Y_t)_{t\geq 0}$.

$\hookrightarrow$ Un processus de Lévy a cette propriété ssi pour tout $t > 0$, $X_t \stackrel{d}{=} t^{\frac{1}{\alpha}} X_1$. On dit alors que X est un processus strictement stable d'indice α.

Cas des processus stables :

Définition

Un processus stochastique $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, a la propriété d'autosimilarité d'indice $\frac{1}{\alpha} > 0$ si $\forall k > 0$ $(Y_{kt})_{t \geq 0}$ a même loi que $(k^{\frac{1}{\alpha}} Y_t)_{t \geq 0}$.

$\hookrightarrow$ Un processus de Lévy a cette propriété ssi pour tout $t > 0$, $X_t \stackrel{d}{=} t^{\frac{1}{\alpha}} X_1$. On dit alors que X est un processus strictement stable d'indice α.

$\hookrightarrow$ Par cette propriété, le paramètre $\rho = \mathbb{P}(X_t > 0)$ est indépendant de t.

Plan

On s'intéresse au temps d'atteinte :

$$\tau_x = \inf\{t > 0,\ X_t = x\},\ x \in \mathbb{R}$$

Cadre d'étude :

- Soit X un processus de Lévy strictement α-stable, $1 < \alpha \leq 2$.
- $\mathbb{E}\left(e^{i\lambda X_1}\right) = \exp[-(i\lambda)^{\alpha} e^{-i\pi\alpha\rho sgn(\lambda)}]$.
- $\rho \in [1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}]$

Propriétés de τ_x :

- τ_x est une variable aléatoire absolument continue.
- τ_x est α auto-similaire :

$$\forall x \geq 0, \quad \tau_x \stackrel{d}{=} x^\alpha \tau_1, \quad \tau_{-x} \stackrel{d}{=} x^\alpha \tau_{-1}$$

- Les points d'un processus α-stable, $\alpha \leq 1$ sont polaires.

$$\Rightarrow \tau_x = +\infty \ \text{ p.s}$$

Plan

Définition

Une variable aléatoire X est dite unimodale de mode a si $\mathbb{P}[X \leq x]$ est convexe sur $(-\infty, a]$ et concave sur $[a, +\infty)$.

Définition

Une variable aléatoire X est dite unimodale de mode a si $\mathbb{P}[X \leq x]$ est convexe sur $(-\infty, a]$ et concave sur $[a, +\infty)$.

Remarques

* En particulier, si X est à densité, X est unimodale de mode a si sa densité f est croissante sur $(-\infty, a]$ et décroissante sur $[a, +\infty)$.

Définition

Une variable aléatoire X est dite unimodale de mode a si $\mathbb{P}[X \leq x]$ est convexe sur $(-\infty, a]$ et concave sur $[a, +\infty)$.

Remarques

* En particulier, si X est à densité, X est unimodale de mode a si sa densité f est croissante sur $(-\infty, a]$ et décroissante sur $[a, +\infty)$.
* Le mode n'est pas nécessairement unique.

Quelques exemples

Théorème (Yamazato (78))

Toutes les lois stables sont unimodales.

Lois de Student, lois du χ^2, sont également unimodales.

Théorème (T.S, J.L (2013))

La variable aléatoire τ est unimodale.

Théorème (T.S, J.L (2013))

La variable aléatoire τ est unimodale.

Remarque

Cas spectralement négatif ($\rho = \frac{1}{\alpha}$) : $\tau = T_1$ p.s, avec $T_1 = \inf\{t > 0,\ X_t > 1\}$ variable aléatoire $\frac{1}{\alpha}$-stable, donc unimodale.

Théorème

$$\tau \stackrel{d}{=} \left(\frac{\mathbf{Z}_{\rho\alpha}^{\rho\alpha}}{\mathbf{Z}_{\rho\alpha}^{\rho\alpha}} \right)^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \times \mathbf{Z}_{\frac{1}{\alpha}}.$$

où $\mathbf{Z}_\alpha$ *variable aléatoire* α*-stable positive* $(0 < \alpha < 1)$ *telle que :*

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{Z}_\alpha\right) = e^{-\lambda^\alpha}$$

Idées de la démonstration :

- $\mathbb{E}\left(\tau^{-s}\right) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left(e^{-q\tau}\right) q^{s-1} dq, \ \forall s \in (0,1).$
- $\mathbb{E}\left(e^{-q\tau}\right) = k \ q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \mathbb{E}\left(Z_1 e^{-qZ_1}\right)$ où $Z_1 = (\max(X_1, 0))^{\alpha}$.

$$\Rightarrow \ \mathbb{E}\left(\tau^{-s}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{\alpha}) \sin(\pi\rho\alpha(-s + \frac{1}{\alpha}))}{\sin(\pi\rho) \sin(\pi(-s + \frac{1}{\alpha}))} \ \frac{\Gamma(1 + \alpha s)}{\Gamma(1 + s)}.$$

Définition (I.Cuculescu ; R.Theodorescu)

Une variable aléatoire X est multiplicativement fortement unimodale (MFU) si $\forall Y$ unimodale indépendante de X, XY est unimodale.

Remarque

X MFU $\Rightarrow$ X Unimodale.

Exemple

Soit X v.a de densité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = C\mathbb{1}_{(0,1]}(x)\frac{1}{1+(\log(x))^2}.$$

X est unimodale de mode 1.

Soit Y v.a de densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha\mathbb{1}_{[0,a]}(x) + \beta\mathbb{1}_{[1,b]}(x),$$

avec $\alpha a + \beta(b-1) = 1$ et $1 < a < b$. Y est unimodale mais le produit XY ne l'est pas pour certains choix de constantes. $(\alpha = 1/21, a = e^{1/2}, b = 34 - (11/77)e^{1/2})$.

Exemples

- Lois exponentielles, Lois Gamma .
- Mélange de lois Gamma.

Factorisation de Kanter ('75) :

Pour $\alpha < 1$, on a :

$$\mathbf{Z}_\alpha^{-\alpha} \stackrel{d}{=} \mathbf{L}^{1-\alpha} \times b_{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{U}),$$

avec :

- $\mathbf{L}$ suit une exponentielle de paramètre 1.
- $\mathbf{U}$ loi uniforme sur $(0, 1)$.

$$\forall u, c \in (0,1), \quad b_c(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\sin^c(\pi c u) \sin^{1-c}(\pi(1-c)u)}$$

- On pose $K_c = \kappa_c^{-1} b_c(\mathbf{U})$. est $[0, 1]$.

$$\tau \stackrel{d}{=} \kappa_{\frac{1}{\alpha}}^{-\alpha} \left(\frac{\mathbf{L}^{1-\rho\alpha}}{\mathbf{L}^{1-\rho\alpha}} \right)^{(\frac{1}{\alpha})} \times \mathbf{L}^{1-\alpha} \times \mathbf{K}_{\rho\alpha}^{(\frac{1}{\alpha})} \times (\mathbf{K}_{\rho\alpha}^{-1})^{(\frac{1}{\alpha})} \times \mathbf{K}_{\frac{1}{\alpha}}^{-\alpha}$$

$\Rightarrow \left(\frac{\mathbf{L}^{1-\rho\alpha}}{\mathbf{L}^{1-\rho\alpha}} \right)^{(\frac{1}{\alpha})} \times \mathbf{L}^{1-\alpha}$ est MFU.

Proposition

$$\mathbf{K}_{\rho\alpha}^{(\frac{1}{\alpha})} \times (\mathbf{K}_{\rho\alpha}^{-1})^{(\frac{1}{\alpha})} \times \mathbf{K}_{\frac{1}{\alpha}}^{-\alpha}$$

est unimodale

- I. Cuculescu and R. Theodorescu. Multiplicative strong unimodality. *Austral. & New Zealand J. Statist.* **40** (2), 205-214, 1998.
- M. Kanter. Stable densities under change of scale and total variation inequalities. *Ann. Probab.* **3**, 697-707, 1975.
- A. Kuznetsov, A. E. Kyprianou, J. C. Millan and A. R. Watson. The hitting time of zero for a stable process. Preprint, 2012.
- K. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

- T. Simon. Hitting densities for spectrally positive stable processes. *Stochastics* **83** (2), 203-214, 2011.
- T. Simon. A multiplicative short proof for the unimodality of stable densities. *Elec. Comm. Probab.* **16**, 623-629, 2011.
- T. Simon. On the unimodality of power transformations of positive stable densities. *Math. Nachr.* **285** (4), 497-506, 2012.
- M. Yamazato. Hitting time distributions of single points for 1-dimensional generalized diffusion processes. *Nagoya Math. J.* **119**, 143-172, 1990.

K. Yano, Y. Yano and M. Yor. On the laws of first hitting times of points for one-dimensional symmetric stable Lévy processes. *Sémin. Probab.* **XLII**, 187-227, 2009.

V. M. Zolotarev. *One-dimensional stable distributions.* AMS, Providence, 1986.