

# Marches aléatoires sur des graphes aléatoires engendrés par des processus ponctuels dans $\mathbb{R}^d$

Récurrence/transience - Principe d'invariance *annealed*

Arnaud Rousselle

**Onzième Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens**

Forges-les-Eaux

Jeudi 10 Avril 2014



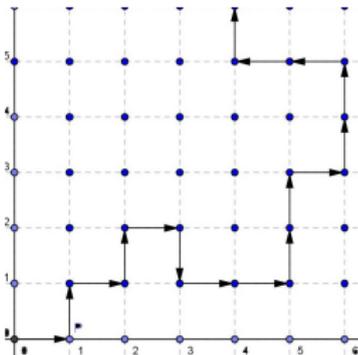
# Plan

- 1 Introduction
- 2 Présentation des modèles
- 3 Récurrence/transience
- 4 Principe d'invariance *annealed*
- 5 Généralisations et perspectives

# Marches aléatoires

## Cadre classique

- ▶ Espace d'états déterministe
- ▶ Probabilités de transition fixées



- ▶ Grille  $\mathbb{Z}^d$ , plus proches voisins:
  - Récurrence  $d = 1, 2$ ; transience  $d \geq 3$   
[Pólya, '21]
  - Principe d'invariance  
[Donsker, '51]

## Dans la littérature

- ▶ Marches aléatoires sur des amas de percolation (régime surcritique)  
[Grimmett *et al.*, '93]  
[De Masi *et al.*, '89]
- ▶ Marches aléatoires à longue portée sur des processus ponctuels  
[Caputo *et al.*, '09]  
[Faggionato *et al.*, '06]

## Notre cadre

- ▶ Espace d'états: sous-ensemble aléatoire loc. fini  $\xi$  de  $\mathbb{R}^d$
- ▶ Graphe infini, connexe, chaque sommet de degré fini
  - Ex.: triangulation de Delaunay, graphe de Gabriel, ...
- ▶ Probabilités de transition:

$$P_{\xi}[X_{n+1} = y | X_n = x] = \frac{1}{\deg(x)}$$

- 1 Introduction
- 2 Présentation des modèles**
- 3 Récurrence/transience
- 4 Principe d'invariance *annealed*
- 5 Généralisations et perspectives

# Processus ponctuels - PPP homogènes

Processus ponctuel :  $\xi$  sous-ensemble aléatoire localement fini de  $\mathbb{R}^d$

Processus ponctuel de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$

- 1  $\forall (A_i)_i \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  2 à 2 disjoints, les v.a.  $\#(\xi \cap A_i)$  sont indépendantes
- 2  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,  $\#(\xi \cap A)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda \cdot \text{Vol}(A)$

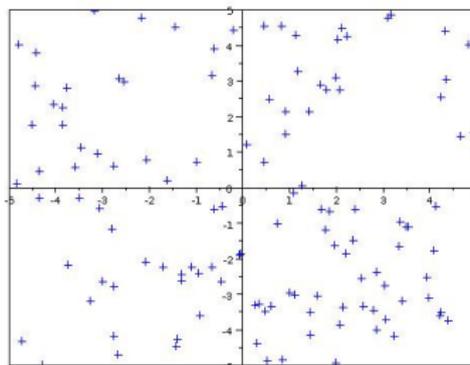


Figure : Simulation d'un PPP d'intensité 1

## Processus «Matérn Cluster»

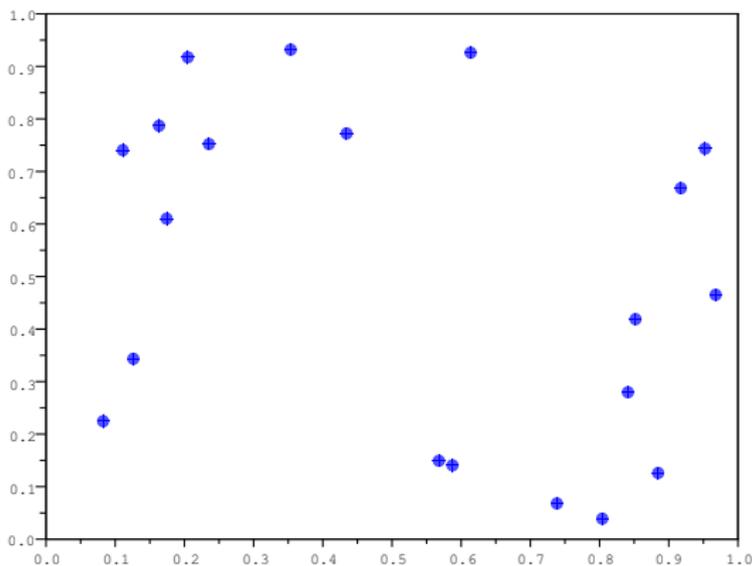


Figure : Simulation d'un MCP (int. parents=20,  $r=0.05$ , int. enfants=10/aire disque)

## Processus «Matérn Cluster»

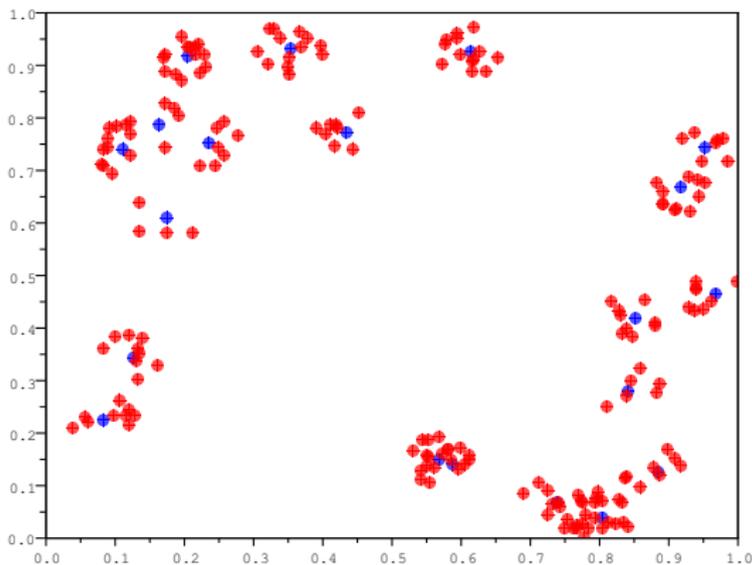


Figure : Simulation d'un MCP (int. parents=20,  $r=0.05$ , int. enfants=10/aire disque)

## Processus «Matérn Cluster»

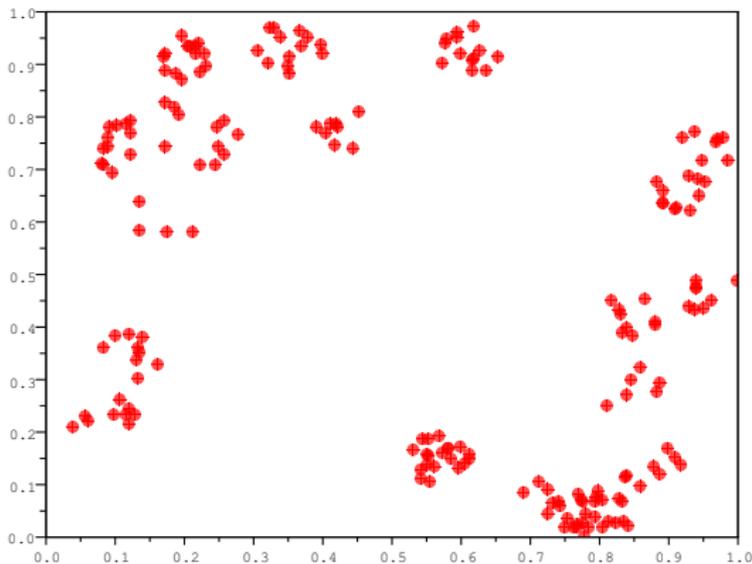


Figure : Simulation d'un MCP (int. parents=20,  $r=0.05$ , int. enfants=10/aire disque)

## Processus «Matérn Hardcore»

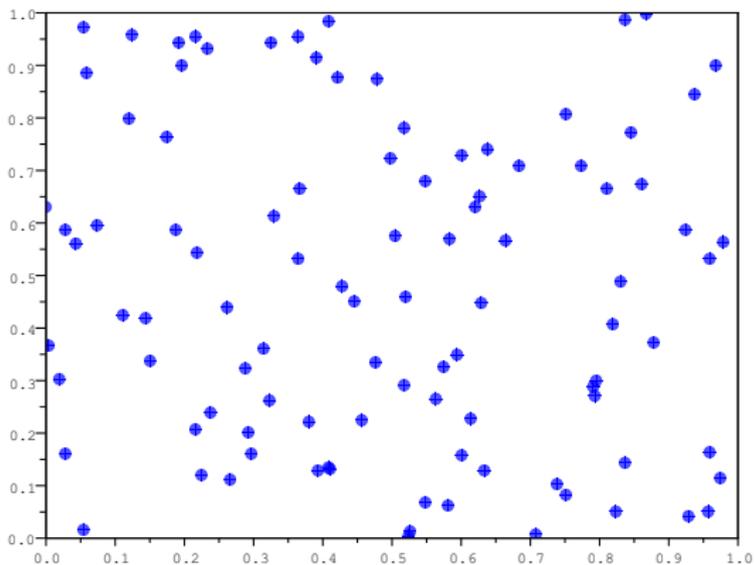


Figure : Simulation d'un MHP (int. initiale=100,  $r=0.1$ )

## Processus «Matérn Hardcore»

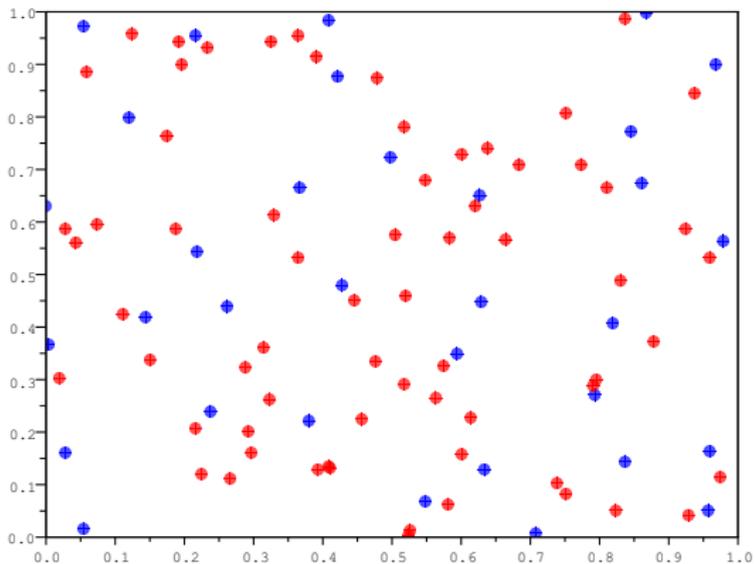


Figure : Simulation d'un MHP (int. initiale=100,  $r=0.1$ )

## Processus «Matérn Hardcore»

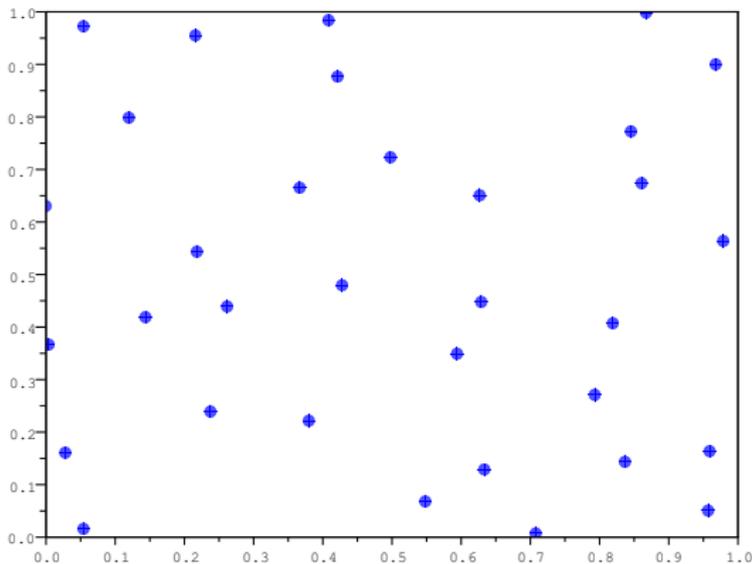


Figure : Simulation d'un MHP (int. initiale=100,  $r=0.1$ )

# Processus déterminantaux

## Fonctions de corrélation

$\rho_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , telles que pour toute famille  $(A_i)_i$  de mesurables disjoints

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^k \#(\xi \cap A_i) \right] = \int_{\prod_{i=1}^k A_i} \rho_k(x_1, \dots, x_k) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_k)$$

## Processus déterminantal de noyau $K$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d, \rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det \left( (K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \right)$$

## Exemple de processus déterminantal [Ginibre, '65]

$A =$  Matrice  $n \times n$  d'entrées gaussiennes complexes standards i.i.d.

Les valeurs propres de  $A$  constituent un processus déterminantal sur  $\mathbb{C}$  de noyau

$$K_n(z, w) = \frac{1}{\pi} \exp \left[ -\frac{1}{2} (|z|^2 + |w|^2) \right] \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(z\bar{w})^k}{k!}.$$

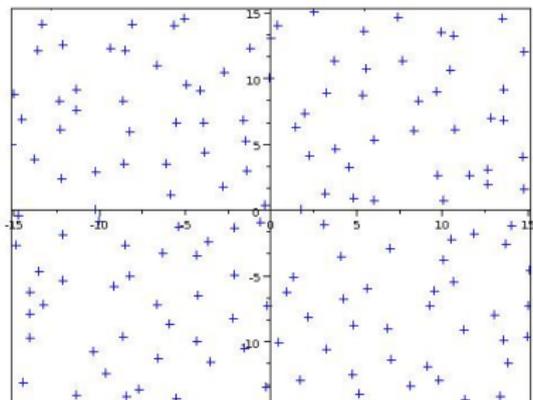
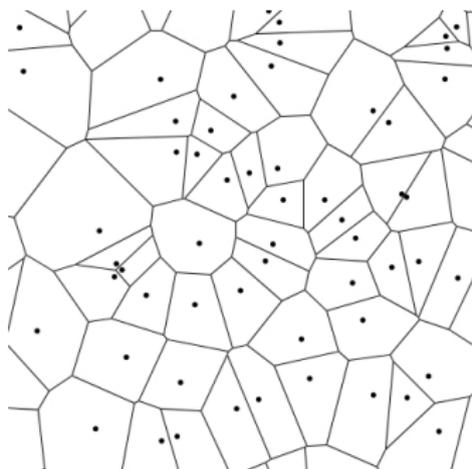


Figure : Simulation des valeurs propres de  $A$  ( $n = 1000$ )

# Mosaïque de Voronoï

- ▶ Partition de  $\mathbb{R}^d$  en polyèdres convexes
- ▶ Cellule de Voronoï de germe  $u \in \xi$ :

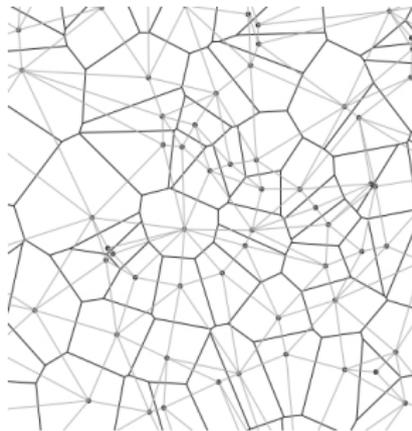
$$C_u := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - u\| \leq \|x - v\|, \forall v \in \xi\}$$



$VS(\xi) :=$  «squelette de la mosaïque de Voronoï de  $\xi$ »

# Triangulation de Delaunay

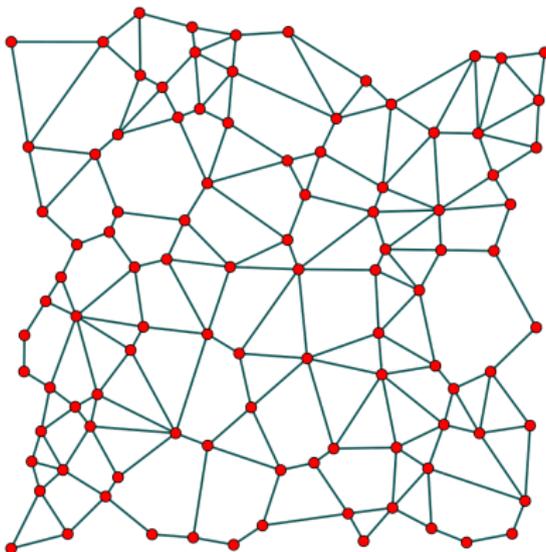
- ▶ Dual de la mosaïque de Voronoï de  $\xi$ 
  - ↔ «ensemble de sommets» =  $\xi$
  - ↔ une arête entre  $u$  et  $v$  ssi  $C_u$  et  $C_v$  partagent une face  $(d-1)$ -dim.
- ▶ Caractérisation par les sphères circonscrites



$DT(\xi) :=$  «triangulation de Delaunay de  $\xi$ »

# Graphe de Gabriel

- ▶ Sous-graphe de la triangulation de Delaunay
  - ↪ «ensemble de sommets» =  $\xi$
  - ↪ une arête entre  $u$  et  $v$  ssi la boule de diamètre  $[u, v]$  est vide



$\text{Gab}(\xi) :=$  «graphe de Gabriel engendré par  $\xi$ »

- 1 Introduction
- 2 Présentation des modèles
- 3 Récurrence/transience**
- 4 Principe d'invariance *annealed*
- 5 Généralisations et perspectives

## Hypothèses sur le processus ponctuel

**(V) Estimées de «Void probabilities»:**

$$\exists c_1 > 0, \forall L \text{ grand} : \mathbb{P}[\#([0, L]^d \cap \xi) = 0] \leq e^{-c_1 L^d}.$$

**(D) Estimées de déviations:**

$$\exists c_2, c_3 > 0, \forall L \text{ grand} : \mathbb{P}[\#([0, L]^d \cap \xi) \geq c_2 L^d] \leq e^{-c_3 L^d}.$$

**(FR) Rang de dépendance fini  $k$  ( $d \geq 3$ ):**

$\forall A, B \subset \mathbb{R}^d$  t.q.  $d(A, B) \geq k$ ,  $\xi \cap A$  et  $\xi \cap B$  sont indépendants.

**(ND) Absence de chaîne descendante ( $d \geq 3$ , graphe de Gabriel):**

Pour p.t.  $\xi$ ,  $\forall (u_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \xi$ ,  $\exists i \in \mathbb{N}$ ,  $\|u_{i+2} - u_{i+1}\| \geq \|u_{i+1} - u_i\|$ .

# Résultats

## Théorème

Soit  $\xi$  un proc. ponctuel simple et stationnaire dans  $\mathbb{R}^d$  p.s. en position générale.

**Récurrence pour  $d = 2$ :** Si  $\xi$  satisfait **(V)** et **(D)**, alors pour p.t. réalisation de  $\xi$  les marches simples sur  $DT(\xi)$ ,  $Gab(\xi)$  et  $VS(\xi)$  sont récurrentes.

**Transience pour  $d \geq 3$ :** Si  $\xi$  satisfait **(V)**, **(D)** et **(FR)**, alors pour p.t. réalisation de  $\xi$  les marches simples sur  $DT(\xi)$  et  $VS(\xi)$  sont transientes.  
Si de plus  $\xi$  satisfait **(ND)**, la même conclusion est vraie sur  $Gab(\xi)$ .

Ces conditions sont satisfaites si  $\xi$  est:

- ▶ un processus de Poisson (indépendance),
- ▶ un processus «Matérn Cluster» (attractivité),
- ▶ un processus «Matérn Hardcore» (répulsivité),
- ▶ un processus déterminantal stationnaire ( $d = 2$ , répulsivité).

- 1 Introduction
- 2 Présentation des modèles
- 3 Récurrence/transience
- 4 Principe d'invariance *annealed***
- 5 Généralisations et perspectives

## Principe d'invariance *annealed*

- ▶  $\mathbb{P}_0$ : version de Palm d'un PPP, d'un MCP ou d'un MHP dans  $\mathbb{R}^d$
- ▶  $(X_t^{\xi^0})_{t \geq 0}$ : VSRW sur  $DT(\xi^0)$  ou  $Gab(\xi^0)$  partant de 0
- ▶  $P_0^{\xi^0}$ : loi de la marche  $(X_t^{\xi^0})_{t \geq 0}$

### Théorème

Le processus mis à l'échelle  $\underline{Y}^{\xi^0, \varepsilon} := (\varepsilon X_{\varepsilon^{-2}t}^{\xi^0})_{t \geq 0}$  converge faiblement en  $\mathbb{P}_0$ -probabilité vers un mouvement brownien de matrice de covariance  $\sigma^2 \mathbf{1}$  avec:

$$\sigma^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}_0 [E_0^{\xi^0} [(X_t^{\xi^0} \cdot e_1)^2]].$$

### Éléments de la preuve:

- ▶ Environnement vu par la particule  $(\xi_t^0)_{t \geq 0}$   
 ↪ Permet de reconstruire la marche en fonction d'un processus markovien
- ▶ Principe d'invariance pour des fonctionnelles de chaînes de Markov [De Masi et al., '89]
- ▶ Minoration du coefficient de diffusion

# Généralisations et perspectives



- ▶ Autres exemples d'applications
  - ↪ conductances plus générales
  - ↪ autres processus ponctuels
  - ↪ autres graphes
- ▶ Estimées précises de la résistance efficace en volume fini
  - ↪ nombre moyen de retours au point de départ avant la sortie d'une fenêtre
- ▶ Inégalités isopérimétriques
- ▶ Comportement asymptotique de :
 
$$\mathbb{E}_0 [P_0^{\xi^0} [X_t = 0]] \text{ et } P_x^{\xi^0} [X_t = y]$$
- ▶ Principes d'invariance *quenched*

Merci pour votre attention!