Une formule de type Itô pour le mouvement brownien fractionnaire en temps brownien

Raghid Zeineddine

Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)

10 Avril 2014

Plan de la présentation

Ne partez pas, ça va être intéressant !

Plan de la présentation

Définition du M.B.F.T.B.

Soit $(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ un mouvement brownien fractionnaire, i.e. un processus gaussien centré, continu, admettant la fonction de covariance suivante :

$$E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right),$$

où $H \in (0,1)$ est l'indice d'Hurst. Soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard indépendant de B^H.
Le mouvement brownien fractionnaire en temps brownien (M.B.F.T.B.) $(Z_t^H)_{t\geq 0}$ est défini par :

$$Z_t^H = B_{Y_t}^H.$$

Pour $H = \frac{1}{2}$, on retrouve le mouvement brownien itéré (M.B.I.) introduit par Burdzy en 1993.

Quelques propriétés du M.B.F.T.B.

Voici quelques propriétés élémentaires de ce processus :

- Il est auto-similaire d'ordre $\frac{H}{2}$, i.e.

$$\forall c > 0 : \qquad (Z^H_{ct})_{t\geq 0} \stackrel{\text{loi}}{=} c^{\frac{H}{2}} (Z^H_t)_{t\geq 0}.$$

- Ses incréments sont stationnaires et dépendants.
- Il est centré et non-gaussien (car on a par exemple $E\left[(Z^H_t)^4\right] \neq 3E\left[(Z^H_t)^2\right]^2$).

Plan de la présentation

Formule d'Itô pour le mouvement brownien (1944)

D'après le théorème fondamental de l'analyse, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est C^1 alors

$$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Si on considère un mouvement brownien standard $(W_t)_{t\geq 0}$ et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^2 alors, par la formule d'Itô,

$$f(W_t) - f(0) = \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds, \; t \geq 0. \tag{1}$$

Formule d'Itô pour le mouvement brownien (1944)

Dans (1), l'intégrale d'Itô est de type forward. Elle est, pour des processus X et Y continus, définie comme suit :

$$\int_0^t X_s d^- Y_s := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor 2^n t\rfloor -1} X_{k2^{-n}}(Y_{(k+1)2^{-n}} - Y_{k2^{-n}}). \tag{2}$$

On sait que le terme additionnel $\frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$ qui apparaît dans (1) est dû à la non-négligibilité de la variation quadratique de W. Plus précisement,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor 2^n t\rfloor -1} (W_{(k+1)2^{-n}} - W_{k2^{-n}})^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} t \quad \text{lorsque } n \to \infty. \tag{3}$$

Formule d'Itô de type forward pour le mbf

En considérant une famille $\{B^H\}_{H\in(0,1)}$ de mouvements browniens fractionnaires (mbf) paramétrée par le paramètre de Hurst H, on va pouvoir interpréter (1) d'une manière plus dynamique.

Rappelons que $B^{\frac{1}{2}}$ n'est rien d'autre qu'un mouvement brownien standard.

L'extension de (3) pour tout $H \in (0,1)$ est donnée par :

$$2^{n(2H-1)} \sum_{k=0}^{\lfloor 2^n t\rfloor -1} (B^H_{(k+1)2^{-n}} - B^H_{k2^{-n}})^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} t \quad \text{lorsque } n \to \infty. \qquad (4)$$

Formule d'Itô de type forward pour le mbf

En se basant sur (4), on peut montrer le résultat suivant :

1. Si $H > \frac{1}{2}$ et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^2, alors $\int_0^t f'(B_s^H) d^- B_s^H$ existe comme une limite en probabilité et on a
$$f(B_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(B_s^H) d^- B_s^H, \quad t \geq 0.$$
2. Si $H < \frac{1}{2}$, alors
$$\int_0^t B_s^H d^- B_s^H = -\infty \quad \text{p.s.},$$
ce qui signifie qu'il n'y a pas de formule de changement de variable pour $f(x) = x^2$.

On voit ainsi que $H = \frac{1}{2}$ apparaît comme la valeur critique pour la formule de changement de variable associée à l'intégrale de type forward (2). Ceci est dû au fait que c'est précisément la valeur pour laquelle le signe de $2H - 1$ change dans (4).

Formule d'Itô de type forward pour le mbf

Pour $H < \frac{1}{2}$, soit $f(x) = x^2$. A l'aide de la formule suivante :

$$b^2 - a^2 = 2a(b-a) + (b-a)^2,$$

en posant $b = B^H_{(k+1)2^{-n}}, a = B^H_{k2^{-n}}$ et en prenant la somme, on aura :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\lfloor 2^n t\rfloor -1} \left((B^H_{(k+1)2^{-n}})^2 - (B^H_{k2^{-n}})^2\right) &= 2\sum_{k=0}^{\lfloor 2^n t\rfloor -1} B^H_{k2^{-n}}(B^H_{(k+1)2^{-n}} - B^H_{k2^{-n}}) \\ &+ \sum_{k=0}^{\lfloor 2^n t\rfloor -1} (B^H_{(k+1)2^{-n}} - B^H_{k2^{-n}})^2.\end{aligned}$$

Donc, on a

$$(B^H_{\lfloor 2^n t\rfloor 2^{-n}})^2 - \sum_{k=0}^{\lfloor 2^n t\rfloor -1} (B^H_{(k+1)2^{-n}} - B^H_{k2^{-n}})^2 = 2\sum_{k=0}^{\lfloor 2^n t\rfloor -1} B^H_{k2^{-n}}(B^H_{(k+1)2^{-n}} - B^H_{k2^{-n}}).$$

Ce qui implique, d'après (4), que $\int_0^t B^H_s d^- B^H_s = -\infty$ p.s.

Formule d'Itô de type Stratonovich pour le mbf

Pour aller plus loin, on peut se demander quelle formule de changement de variable on aurait en remplaçant (2) par l'intégrale symétrique suivante (lorsque la limite existe) :

$$\int_0^t X_s d^\circ Y_s := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor 2^n t\rfloor -1} \frac{1}{2}\left(X_{k2^{-n}} + X_{(k+1)2^{-n}}\right)\left(Y_{(k+1)2^{-n}} - Y_{k2^{-n}}\right). \quad (5)$$

Il s'agit en fait d'un problème très difficile, qui n'a été résolu que récemment. Dans ce contexte, la quantité clé est la variation cubique.

Formule d'Itô de type Stratonovich pour le mbf

La variation cubique satisfait, pour $H \leq \frac{1}{2}$, la convergence en loi suivante :

$$2^{n(3H-\frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\lfloor 2^n t \rfloor - 1} (B^H_{(k+1)2^{-n}} - B^H_{k2^{-n}})^3 \stackrel{\text{loi}}{\to} N(0, \sigma_H^2) \quad \text{lorsque } n \to \infty. \quad (6)$$

On remarque que $H = \frac{1}{6}$ est la valeur qui fait changer le signe de $3H - \frac{1}{2}$ dans (6). C'est donc la valeur critique pour l'intégrale symétrique.

Ceci est illustré par le théorème qui suit, qui fût démontré après beaucoup d'efforts dans [1,2] pour $H \neq \frac{1}{6}$ et dans [4] pour $H = \frac{1}{6}$.

Formule d'Itô de type Stratonovich pour le mbf

Theorem

1. *Si* $H > \frac{1}{6}$ *alors* $\int_0^t f'(B_s^H) d^\circ B_s^H$ *existe en tant que limite en probabilité et on a*

$$f(B_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(B_s^H) d^\circ B_s^H, \quad t \geq 0. \tag{7}$$

2. *Si* $H = \frac{1}{6}$ *alors* $\int_0^t f'(B_s^{\frac{1}{6}}) d^\circ B_s^{\frac{1}{6}}$ *existe en tant que limite en loi et on a, avec* W *un mouvement brownien standard indépendant de* $B^{\frac{1}{6}}$ *et* $\kappa_3 \simeq 2.322$,

$$f(B_t^{\frac{1}{6}}) \overset{\text{loi}}{=} f(0) + \int_0^t f'(B_s^{\frac{1}{6}}) d^\circ B_s^{\frac{1}{6}} - \frac{\kappa_3}{12} \int_0^t f'''(B^{\frac{1}{6}}) dW_s, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

3. *Si* $H < \frac{1}{6}$ *alors* $\int_0^t (B_s^H)^2 d^\circ B_s^H$ *n'existe pas, même en loi.*

Plan de la présentation

Formule d'Itô de type Stratonovich pour le M.B.I.

Rappelons que le M.B.I. $Z^{\frac{1}{2}}$ est auto-similaire d'ordre $\frac{1}{4}$ et que ses incréments sont stationnaires. Donc, en un certain sens, il est proche du mbf $B^{\frac{1}{4}}$. Et comme pour ce dernier, $Z^{\frac{1}{2}}$ n'est pas une semimartingale. Une question importante est donc de savoir si on peut définir un calcul stochastique par rapport à ce processus.

La réponse à cette question a été donnée par Khoshnevisan et Lewis en 1999 dans [3, 4]. Ils ont construit une intégrale stochastique de type Stratonovich contre le M.B.I. en se servant d'une certaine suite de temps d'arrêts du mouvement brownien. De plus, ils ont montré la formule de changement de variable suivante :

$$f(Z_t^{\frac{1}{2}}) = f(0) + \int_0^t f'(Z_s^{\frac{1}{2}}) d^\circ Z_s^{\frac{1}{2}}, \quad t \geq 0.$$

Formule d'Itô de type Stratonovich pour le M.B.F.T.B.

En suivant la stratégie de Khoshnevisan et Lewis, j'ai réussi dans ma thèse [6,7] à généraliser leurs résultats, et ainsi à construire une intégrale stochastique contre le M.B.F.T.B. qui satisfait les formules de changement de variable suivantes (suivant la valeur de H).

Theorem

1. *Si* $H > \frac{1}{6}$ *alors*

$$f(Z_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(Z_s^H) d^\circ Z_s^H, \quad t \geq 0.$$

2. *Si* $H = \frac{1}{6}$ *alors*

$$f(Z_t^{\frac{1}{6}}) \overset{\text{loi}}{=} f(0) + \int_0^t f'(Z_s^{\frac{1}{6}}) d^\circ Z_s^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{12} \int_0^t f'''(Z_s^{\frac{1}{6}}) d^3 Z_s, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

3. *Si* $H < \frac{1}{6}$ *alors* $\int_0^t (Z_s^H)^2 d^\circ Z_s^H$ *n'existe pas, même en loi.*

Formule d'Itô de type Stratonovich pour le M.B.F.T.B.

Notons que, dans (9),

$$\int_0^t f'''(Z_s^{\frac{1}{6}})d^3Z_s,$$

est une variable aléatoire égale en loi à $\int_0^{Y_t} f'''(B_s^{\frac{1}{6}})dW_s$, où W est un mouvement brownien indépendant du couple $(B^{\frac{1}{6}}, Y)$.

Bibliographie

[1] P. Cheridito and D. Nualart (2005)
Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (0, \frac{1}{2})$.
Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **41**, no. 6, pp. 1049-1081.

[2] M. Gradinaru, I. Nourdin, F. Russo and P. Vallois (2005)
m-order integrals and generalized Itô's formula : the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index.
Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **41**, no. 4, pp. 781-806.

[3] D. Khoshnevisan and T. M. Lewis (1999)
Stochastic calculus for Brownian motion on a Brownian fracture.
Ann. Appl. Probab. **9**, no. 3, pp. 629-667.

[4] D. Khoshnevisan and T. M. Lewis (1999)
Iterated Brownian motion and its intrinsic skeletal structure.
Progress in Probability **45**, pp. 201-210, Birkhaüser Verlag, Basel.

Bibliographie

[5] I. Nourdin, A. Réveillac and J. Swanson (2010)
The weak Stratonovich integral with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter 1/6.
Electron. J. Probab. **15**, no. 70, pp. 2117-2162.

[6] I. Nourdin and R. Zeineddine (2013)
An Itô's type formula for the fractional Brownian motion in Brownian time.
preprint.

[7] R. Zeineddine (2013)
Fluctuations of the power variation of fractional Brownian motion in Brownian time.
Bernoulli, accepted

Merci !