Distributions paracontrolées et équation de quantisation stochastique.

Rémi Catellier

CEREMADE, Université Paris Dauphine

7 avril 2014

Travail en collaboration avec Khalil Chouk

Théorie Φ_3^4

- La théorie quantique des champs Φ_3^4 est décrite par une mesure μ sur l'ensemble $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ des distributions, telle que (formellement)

$$\mathrm{d}\mu(\phi) = \frac{1}{Z}\exp(-S(\phi)) \prod_{x\in\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\phi_x,$$

où l'action S est décrite par $S(\phi) = \int |\nabla\phi|^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^4 \mathrm{d}x$.

Théorie Φ^4_3

- La théorie quantique des champs Φ^4_3 est décrite par une mesure μ sur l'ensemble $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ des distributions, telle que (formellement)

$$\mathrm{d}\mu(\phi) = \frac{1}{Z}\exp(-S(\phi)) \prod_{x\in\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\phi_x,$$

  où l'action S est décrite par $S(\phi) = \int |\nabla\phi|^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^4 \mathrm{d}x$.

- Par analogie, on considère dans $\mathbb{R}^d$, la mesure

$$\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{Z_d}\exp(-S_d(x))\mathrm{d}x.$$

Théorie Φ_3^4

- La théorie quantique des champs Φ_3^4 est décrite par une mesure μ sur l'ensemble $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ des distributions, telle que (formellement)

$$\mathrm{d}\mu(\phi) = \frac{1}{Z} \exp(-S(\phi)) \prod_{x \in \mathbb{R}^3} \mathrm{d}\phi_x,$$

  où l'action S est décrite par $S(\phi) = \int |\nabla \phi|^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^4 \mathrm{d}x$.
- Par analogie, on considère dans $\mathbb{R}^d$, la mesure

$$\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{Z_d} \exp(-S_d(x)) \mathrm{d}x.$$

- Sous des hypothèses très générales sur S_d, μ_d est l'unique mesure invariante de l'équation

$$\mathrm{d}x_t = -\nabla S_d(x_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2}\mathrm{d}W_t$$

Équation de quantisation stochastique (1)

- μ mesure sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ telle que (formellement)

$$\mathrm{d}\mu(\phi) = \frac{1}{Z}\exp(-S(\phi))\prod_{x\in\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\phi_x, \text{ avec } S(\phi) = \int |\nabla\phi|^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^4\mathrm{d}x.$$

- De même, μ est (formellement) l'unique mesure invariante de

$$\partial_t\phi = -\frac{\partial S(\phi)}{\partial\phi} + \sqrt{2}\mathrm{d}W$$

Équation de quantisation stochastique (1)

- μ mesure sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ telle que (formellement)

$$\mathrm{d}\mu(\phi) = \frac{1}{Z} \exp(-S(\phi)) \prod_{x \in \mathbb{R}^3} \mathrm{d}\phi_x, \text{ avec } S(\phi) = \int |\nabla \phi|^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^4 \mathrm{d}x.$$

- De même, μ est (formellement) l'unique mesure invariante de

$$\partial_t \phi = -\frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi} + \sqrt{2} \mathrm{d}W$$

On obtient l'équation de quantisation stochastique du champs Φ^4_3 suivante

$$\partial_t \phi = \Delta \phi - \lambda \phi^3 + \xi$$

où ξ est un bruit blanc espace temps, i.e. un processus gaussien tel que

$$\mathbb{E}[\xi(s,x)\xi(s,y)] = \delta(s-t)\delta(x-y)$$

Équation Φ^4_3 : $\partial_t \phi = \Delta\phi - \phi^3 + \xi$

Equation mal posée car (entre autre) le terme non linéaire n'est pas définie (produit de distributions). On se propose de trouver une nouvelle notion de solution.

Avantages :

Équation Φ^4_3 : $\partial_t \phi = \Delta\phi - \phi^3 + \xi$

Equation mal posée car (entre autre) le terme non linéaire n'est pas définie (produit de distributions). On se propose de trouver une nouvelle notion de solution.

Avantages :

- Résolution de manière non perturbative (point fixe).

Équation Φ^4_3 : $\partial_t \phi = \Delta \phi - \phi^3 + \xi$

Equation mal posée car (entre autre) le terme non linéaire n'est pas définie (produit de distributions). On se propose de trouver une nouvelle notion de solution.

Avantages :

- Résolution de manière non perturbative (point fixe).
- Flot continue par rapport au bruit et à la condition initiale.

Équation Φ_3^4 : $\partial_t \phi = \Delta \phi - \phi^3 + \xi$

Equation mal posée car (entre autre) le terme non linéaire n'est pas définie (produit de distributions). On se propose de trouver une nouvelle notion de solution.

Avantages :

- Résolution de manière non perturbative (point fixe).
- Flot continue par rapport au bruit et à la condition initiale.

Désavantages :

- Solution locale en temps.

Équation Φ^4_3 : $\partial_t \phi = \Delta\phi - \phi^3 + \xi$

Equation mal posée car (entre autre) le terme non linéaire n'est pas définie (produit de distributions). On se propose de trouver une nouvelle notion de solution.

Avantages :

- Résolution de manière non perturbative (point fixe).
- Flot continue par rapport au bruit et à la condition initiale.

Désavantages :

- Solution locale en temps.
- Fonctionne sur le tore $\mathbb{T}^3$, mais pas dans $\mathbb{R}^3$.

Équation Φ^4_3 : $\partial_t \phi = \Delta\phi - \phi^3 + \xi$, calculs

- Formulation Mild (équation intégrale) ($\phi_0 = 0$) :

$$\phi_t = -\int_0^t P_{t-s}\phi_s^3 \mathrm{d}s + X_t = I(\phi^3) + X$$

avec $X_t = \int_0^t P_{t-s}\xi(s,.)\mathrm{d}s$ et $I(f) = -\int_0^t P_{t-s} f_s \mathrm{d}s$.

Équation Φ^4_3 : $\partial_t \phi = \Delta\phi - \phi^3 + \xi$, calculs

- Formulation Mild (équation intégrale) ($\phi_0 = 0$) :

$$\phi_t = -\int_0^t P_{t-s}\phi_s^3 \mathrm{d}s + X_t = I(\phi^3) + X$$

avec $X_t = \int_0^t P_{t-s}\xi(s,.)\mathrm{d}s$ et $I(f) = -\int_0^t P_{t-s} f_s \mathrm{d}s$.

- Méthode perturbative : soit $I(f)_t(f) = -\int_0^t P_{t-s} f_s \mathrm{d}s$, l'équation devient alors

$$\phi = I(\phi^3) + X = X + \psi.$$

et on obtient une équation pour ψ,

$$\psi = I(X^3) + 3I(X^2\psi) + 3I(X\psi^2) + I(\psi^3)$$

Une idée (plus ou moins) naïve

- On régularise $X^{\varepsilon} = \rho_{\varepsilon} * X$

Une idée (plus ou moins) naïve

- On régularise $X^\varepsilon = \rho_\varepsilon * X$
- On résout l'équation approchée, bien définie

$$\psi = I((X^\varepsilon)^3) + 3I((X^\varepsilon)^2\psi^\varepsilon) + 3I(X^\varepsilon(\psi^\varepsilon)^2) + I((\psi^\varepsilon)^3)$$

Une idée (plus ou moins) naïve

- On régularise $X^\varepsilon = \rho_\varepsilon * X$
- On résout l'équation approchée, bien définie

$$\psi = I((X^\varepsilon)^3) + 3I((X^\varepsilon)^2\psi^\varepsilon) + 3I(X^\varepsilon(\psi^\varepsilon)^2) + I((\psi^\varepsilon)^3)$$

- On trouve des bornes a priori, qui permettent de passer à la limite en $\varepsilon \to 0$.
- Nécessite de mesurer la régularités des objets mis en jeu.

Espaces de Besov-Hölder

On mesure la régularité dans les espaces de Besov-Hölder $\mathcal{C}^\alpha = \mathcal{B}^\alpha_{\infty,\infty}$
$f \in \mathcal{C}^\alpha$ ssi

$$\|\Delta_i f\| \lesssim 2^{-\alpha i}, \ i \geq 1$$

$$\Delta_i f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}\hat{f})$$

Propriété

Le processus X appartient presque surement à l'espace $C([0,T];\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T}^3))$ pour tout $\alpha < -\frac{1}{2}$

Propriété

L'opérateur I est continu de $\mathcal{C}^\alpha$ dans $\mathcal{C}^{\alpha+2}$.

Paraproduit

Soit $f \in \mathcal{C}^\alpha$ et $g \in \mathcal{C}^\beta$, avec $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, formellement

$$\begin{aligned} fg &= \sum_{i,j} \Delta_i f \Delta_j g \\ &= \sum_{j \geq -1} \sum_{i < j-1} \Delta_i f \Delta_j g + \sum_{|j-i| \leq 1} \Delta_i f \Delta_j g + \sum_{i \geq -1} \sum_{j < i-1} \Delta_i f \Delta_j g \\ &= f \prec g + f \circ g + f \succ g \end{aligned}$$

Paraproduit

Soit $f \in \mathcal{C}^\alpha$ et $g \in \mathcal{C}^\beta$, avec $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, formellement

$$\begin{aligned} fg &= \sum_{i,j} \Delta_i f \Delta_j g \\ &= \sum_{j \geq -1} \sum_{i < j-1} \Delta_i f \Delta_j g + \sum_{|j-i| \leq 1} \Delta_i f \Delta_j g + \sum_{i \geq -1} \sum_{j < i-1} \Delta_i f \Delta_j g \\ &= f \prec g + f \circ g + f \succ g \end{aligned}$$

Théorème (Paraproduit, Bony1981)

- $\prec$ *est continue de* $\mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta$ *dans* $\mathcal{C}^\beta$, $\succ$ *est continue de* $\mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta$ *dans* $\mathcal{C}^{\alpha+\beta}$
- $\circ$ *est continue de* $\mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta$ *dans* $\mathcal{C}^{\alpha+\beta}$ *seulement si* $\alpha + \beta > 0$

$\psi = I(Y^3) + 3I(\psi Y^2) + 3I(\psi^2 Y) + I(\psi^3)$, régularités

$\psi = I(Y^3) + 3I(\psi Y^2) + 3I(\psi^2 Y) + I(\psi^3)$, régularités

- Si Y^2, $I(Y^3)$ et ψ sont bien définies, $Y^2 \in \mathcal{C}^{-1-\varepsilon}$ et $I(Y^3), \psi \in \mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}$.

$\psi = I(Y^3) + 3I(\psi Y^2) + 3I(\psi^2 Y) + I(\psi^3)$, régularités

- Si Y^2, $I(Y^3)$ et ψ sont bien définies, $Y^2 \in \mathcal{C}^{-1-\varepsilon}$ et $I(Y^3), \psi \in \mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}$.
- On utilise le paraproduit sur l'équation.

$$\begin{aligned}
\psi =& I(Y^3) + 3I(Y^2\psi) + 3I(Y\psi^2) + I(\psi^3) \\
=& I(Y^3) + 3I(\psi \prec Y^2) + 3I(\psi \circ Y^2) + 3I(\psi \succ Y^2) \\
& + I(\psi^2 \prec Y) + 3I(\psi^2 \circ Y) + 3I(\psi^2 \succ Y) + I(\psi^3) \\
=& \underbrace{I(Y^3)}_{\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}} + 3\underbrace{I(\psi \prec Y^2)}_{\mathcal{C}^{1-\varepsilon}} + \underbrace{R(\psi, Y, Y^2)}_{\mathcal{C}^{3/2-\varepsilon}}
\end{aligned}$$

- On cherche ψ comme la solution d'un problème de point fixe. Même dans ce cas, il reste deux éléments qui ne sont pas définis

$$I(\psi^2 \circ Y), I(\psi \circ Y^2)$$

Ansatz : Distributions Paracontrolées

On suppose que ψ est de la forme

$$\psi = I(Y^3) + 3I(\underbrace{\psi'}_{\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}} \prec Y^2) + \underbrace{\psi^\sharp}_{\mathcal{C}^{1+\varepsilon}}$$

Ansatz : Distributions Paracontrolées

On suppose que ψ est de la forme

$$\psi = I(Y^3) + 3I(\underbrace{\psi'}_{\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}} \prec Y^2) + \underbrace{\psi^\sharp}_{\mathcal{C}^{1+\varepsilon}}$$

Pour définir le produit dans ce cas là, on a besoin des quantités suivantes :

$$\mathbb{Y} = (Y, Y^2, I(Y^3), I(Y^3) \circ Y, I(Y^2) \circ Y^2), I(Y^3) \circ Y^2)$$

Théorème (C., Chouk 2013)

Pour $\mathbb{Y}$ bien défini, il existe une unique solution ϕ de la forme $\phi = Y + I(Y^3) + 3I(\phi' \prec Y^2) + \phi^\sharp$ à l'équation

$$\phi_t(x) = \int_0^t P_{t-s}\phi_s^3(x)\mathrm{d}s + Y_t,$$

de plus, cette solution est continue par rapport à $\mathbb{Y}$.

Problème : renormalisation

$$\mathbb{E}[(X^{\varepsilon})^2] \sim \frac{1}{\varepsilon}$$

Problème : renormalisation

$$\mathbb{E}[(X^\varepsilon)^2] \sim \frac{1}{\varepsilon}$$

Théorème (C. Chouk 2013)

Il existe $C_1^\varepsilon > 0$ and $C_2^\varepsilon > 0$ deux constantes et φ^ε une fonction continue (en temps) telles que

- $C_1^\varepsilon = O(\frac{1}{\varepsilon})$, $C_2^\varepsilon = O(\log \varepsilon)$
- Il existe $\mathbb{X}$ tel que $\mathbb{X}^\varepsilon \to \mathbb{X}$ avec

$$\begin{aligned}\mathbb{X}^\varepsilon = \Big(& X^\varepsilon, (X^\varepsilon)^2 - C_1^\varepsilon, I((X^\varepsilon)^2 - 3C_1^\varepsilon X^\varepsilon), I((X^\varepsilon)^3 - 3C_1^\varepsilon X^\varepsilon) \circ X^\varepsilon, \\ & I((X^\varepsilon)^2 - C_1^\varepsilon) \circ ((X^\varepsilon)^2 - C_1^\varepsilon) - C_2^\varepsilon - \varphi^\varepsilon, \\ & I((X^\varepsilon)^3 - 3C_1^\varepsilon X^\varepsilon) \circ ((X^\varepsilon)^2 - C_1^\varepsilon) - 3C_2^\varepsilon X^\varepsilon - \varphi^\varepsilon X^\varepsilon \Big)\end{aligned}$$

Equation Φ_3^4 (Final)

Équation renormalisée

$$\begin{cases} \partial_t \phi^\varepsilon = \Delta \phi^\varepsilon - \left((\phi^\varepsilon)^3 - 3(C_1^\varepsilon + 3C_2^\varepsilon)\phi^\varepsilon \right) + \xi^\varepsilon \\ \phi^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon(x) \end{cases}$$

Equation Φ^4_3 (Final)

Équation renormalisée

$$\begin{cases} \partial_t \phi^\varepsilon = \Delta\phi^\varepsilon - \left((\phi^\varepsilon)^3 - 3(C_1^\varepsilon + 3C_2^\varepsilon)\phi^\varepsilon\right) + \xi^\varepsilon \\ \phi^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon(x) \end{cases}$$

- Cette équation admet une unique solution, qui converge quand $\mathbb{X}^\varepsilon \to \mathbb{X}$.

Equation Φ_3^4 (Final)

Équation renormalisée

$$\begin{cases} \partial_t \phi^\varepsilon = & \Delta \phi^\varepsilon - \left((\phi^\varepsilon)^3 - 3(C_1^\varepsilon + 3C_2^\varepsilon)\phi^\varepsilon\right) + \xi^\varepsilon \\ \phi^\varepsilon(0,x) = & u_0^\varepsilon(x) \end{cases}$$

- Cette équation admet une unique solution, qui converge quand $\mathbb{X}^\varepsilon \to \mathbb{X}$.
- Physiquement, la renormalisation revient à soustraire la divergence ultra violette.

Equation Φ^4_3 (Final)

Équation renormalisée

$$\begin{cases} \partial_t \phi^\varepsilon = \Delta\phi^\varepsilon - \left((\phi^\varepsilon)^3 - 3(C_1^\varepsilon + 3C_2^\varepsilon)\phi^\varepsilon\right) + \xi^\varepsilon \\ \phi^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon(x) \end{cases}$$

- Cette équation admet une unique solution, qui converge quand $\mathbb{X}^\varepsilon \to \mathbb{X}$.
- Physiquement, la renormalisation revient à soustraire la divergence ultra violette.
- Cette méthode s'applique dans d'autres cas (KPZ, PAM, SHE...)

Merci de votre attention.