Processus max-stables simples stationnaires et markoviens.

Frédéric Eyi-Minko

Université Paris Ouest Nanterre.

JPS, Forges-les-Eaux, le 8 Avril 2014

Motivation

- La théorie des valeurs extrêmes s'intéresse aux valeurs extrêmes de données collectées.
- Ses domaines d'applications peuvent varier de l'environnement à la finance.
- Nous nous sommes intéressés à diverses propriétés de l'un des outils de cette théorie : les processus max-stables.

Motivation

Prenons $T = \mathbb{Z}$ ou $T = \mathbb{R}$, et considérons $\eta = (\eta(t))_{t \in T}$ un processus stochastique.

Définition

Un processus $\eta = (\eta(t))_{t \in T}$ est dit max-stable simple si et seulement si pour tout $n \geq 1$:

$$\eta \overset{\mathcal{L}}{=} n^{-1} \bigvee_{i=1}^{n} \eta_i$$

où $(\eta_i)_{i \geq 1}$ est une suite i.i.d de processus de même loi que η.

Motivation

- Pour tout $t \in T$, la loi de $\eta(t)$ sur $\mathbb{R}$ est de type Fréchet, Gumbel ou Weibull (Fisher & Tipett '28, Gnedenko '43).
- Nous travaillerons dans le cas où pour tout $t \in T$, $\eta(t)$ suit une loi de Fréchet unitaire, c'est à dire :

$$\mathbb{P}[\eta(t) \leq y] = \exp(-1/y), \quad \text{pour tout } y > 0.$$

Motivation

On cherche à déterminer tous les modèles de processus stochastiques, sur les ensembles $T = \mathbb{Z}$ ou $T = \mathbb{R}$, max-stables simples stationnaires et vérifiant la propriété de Markov.

Plan

1. Cas des processus à temps discrets $T = \mathbb{Z}$
2. Cas des processus à temps continus $T = \mathbb{R}$

Plan de l'exposé

1. Cas des processus à temps discrets $T = \mathbb{Z}$
2. Cas des processus à temps continus $T = \mathbb{R}$

Cas discret $T = \mathbb{Z}$

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi Fréchet unitaire, et notons $(\check{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (F_{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$ son processus à temps renversé associé.

Cas discret $T = \mathbb{Z}$

- Pour $a \in [0,1]$, on définira les processus max-stables max-AR(1) de paramètre a de la façon suivante :

$$X_a(t) = \begin{cases} \bigvee_{n \le t} (1-a)a^{t-n} F_n & \text{si } a \in [0,1) \\ F_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Le processus X_a vérifie la relation de max-autoregressivité :

$$X_a(t+1) = \max(aX_a(t), (1-a)F_{t+1}), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- Pour le processus à temps renversé $\check{X}_a = (X_a(-t))_{t \in \mathbb{Z}}$, on a :

$$\check{X}_a(t) = \begin{cases} \bigvee_{n \ge t} (1-a)a^{n-t} \check{F}_n & \text{si } a \in [0,1) \\ F_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

la relation de max-autoregressivité backward est vérifiée :

$$\check{X}_a(t-1) = \max(a\check{X}_a(t), (1-a)\check{F}_{t-1}), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Cas discret $T = \mathbb{Z}$

- Pour $a \in [0, 1]$, on définira les processus max-stables max-AR(1) de paramètre a de la façon suivante :

$$X_a(t) = \begin{cases} \bigvee_{n \le t} (1-a)a^{t-n}F_n & \text{si } a \in [0,1) \\ F_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Le processus X_a vérifie la relation de max-autoregressivité :

$$X_a(t+1) = \max(aX_a(t), (1-a)F_{t+1}), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

- Pour le processus à temps renversé $\check{X}_a = (X_a(-t))_{t \in \mathbb{Z}}$, on a :

$$\check{X}_a(t) = \begin{cases} \bigvee_{n \ge t} (1-a)a^{n-t}\check{F}_n & \text{si } a \in [0,1) \\ F_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

la relation de max-autoregressivité backward est vérifiée :

$$\check{X}_a(t-1) = \max(a\check{X}_a(t), (1-a)\check{F}_{t-1}), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Cas discret $T = \mathbb{Z}$

Théorème

Tout processus max-stable simple stationnaire $\eta = (\eta(t))_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifiant la propriété de Markov est égal en loi à un processus max-AR(1) ou à son processus à temps renversé associé.

Plan de l'exposé

1. Cas des processus à temps discrets $T = \mathbb{Z}$
2. Cas des processus à temps continus $T = \mathbb{R}$

Cas continu $T = \mathbb{R}$

Soient $\{(U_i, T_i);\ i \geq 1\}$ un PPP$(u^{-2}dudt)$ sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, X_0 une v.a de loi fréchet unitaire, et $a \in (0, 1]$. Considérons alors les deux processus suivants :

- Le processus :

$$Z_a(t) = \begin{cases} \bigvee_{i \geq 1} U_i g_a(t - T_i) & a \in (0,1) \\ X_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

  avec $g_a : t \mapsto -\log(a) a^t 1_{\{t \geq 0\}}$.

- Son processus à temps renversé associé :

$$\check{Z}_a(t) = \begin{cases} \bigvee_{i \geq 1} U_i \check{g}_a(t - T_i) & a \in (0,1) \\ X_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

  avec $\check{g}_a(t) = -\log(a) a^{-t} 1_{\{t < 0\}} = g_a(-t^-)$, $\check{g}_a$ est càd-làg.

Cas continu $T = \mathbb{R}$

Soient $\{(U_i, T_i);\ i \geq 1\}$ un PPP($u^{-2}dudt$) sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, X_0 une v.a de loi fréchet unitaire, et $a \in (0, 1]$. Considérons alors les deux processus suivants :

- Le processus :

$$Z_a(t) = \begin{cases} \bigvee_{i \geq 1} U_i g_a(t - T_i) & a \in (0,1) \\ X_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

  avec $g_a : t \mapsto -\log(a) a^t 1_{\{t \geq 0\}}$.

- Son processus à temps renversé associé :

$$\check{Z}_a(t) = \begin{cases} \bigvee_{i \geq 1} U_i \check{g}_a(t - T_i) & a \in (0,1) \\ X_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

  avec $\check{g}_a(t) = -\log(a) a^{-t} 1_{\{t<0\}} = g_a(-t^-)$, $\check{g}_a$ est càd-làg.

Cas continu $T = \mathbb{R}$

Soient $\{(U_i, T_i);\ i \geq 1\}$ un PPP($u^{-2}dudt$) sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, X_0 une v.a de loi fréchet unitaire, et $a \in (0, 1]$. Considérons alors les deux processus suivants :

- Le processus :

$$Z_a(t) = \begin{cases} \bigvee_{i \geq 1} U_i g_a(t - T_i) & a \in (0,1) \\ X_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

  avec $g_a : t \mapsto -\log(a)a^t 1_{\{t \geq 0\}}$.

- Son processus à temps renversé associé :

$$\check{Z}_a(t) = \begin{cases} \bigvee_{i \geq 1} U_i \check{g}_a(t - T_i) & a \in (0,1) \\ X_0 & \text{si } a = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

  avec $\check{g}_a(t) = -\log(a)a^{-t} 1_{\{t<0\}} = g_a(-t^-)$, $\check{g}_a$ est càd-làg.

Cas continu $T = \mathbb{Z}$

Théorème

Tout processus max-stable simple stationnaire $\eta = (\eta(t))_{t\in\mathbb{R}}$ à trajectoires cád-làg vérifiant la propriété de Markov est égal en loi au processus Z_a ou au processus $\check{Z}_a$ pour un certain $a \in (0, 1]$.

Conclusion et perspective

- Intervention des lois conditionnelles.
- Pour la caractérisation, des résultats avec des processus Markoviens d'ordre k ?