Quelques résultats de convergence pour les cartes planaires aléatoires.

Céline Abraham
Université Paris-Sud

7 avril 2014

Définition

On considère un graphe fini connexe, on autorise les boucles et les arêtes multiples.

Définition

Une carte planaire finie m est une classe d'équivalence de tels graphes plongés dans la sphère, modulo les homéomorphismes de la sphère qui préservent l'orientation.

Motivations

- En combinatoire et informatique théorique : dénombrer les cartes (Tutte), théorème des 4 couleurs...
- En algèbre : énumération de cartes et intégrales de matrices, Lando et Zvonkin *Graphs on surfaces and their applications*
- En physique théorique : grandes cartes planaires comme modèles de géométrie aléatoire, gravité quantique (Bouttier, Guitter), relation KPZ (Duplantier, Sheffield).
- En probabilités : modèle pour une surface brownienne.

Enracinement : une carte planaire est enracinée si on distingue une arête orientée $e^* = (e^*_-, e^*_+)$ de m, qu'on appelle l'arête racine.

Définition

On appelle degré d'une face le nombre de demi-arêtes qui bordent cette face. Une p-angulation est une carte planaire dont toutes les faces sont de degré p.

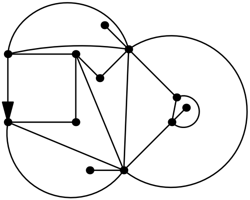
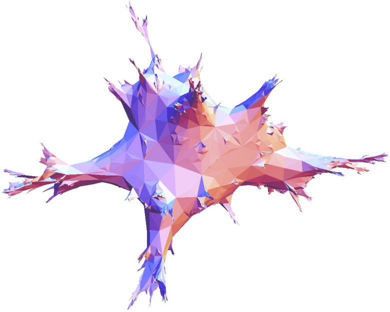


FIGURE: Une quadrangulation ($p = 4$) enracinée à 10 faces

Une simulation d'une grande carte aléatoire, réalisée par Nicolas Curien



On considère une carte planaire m.

Définition

Soient u et v deux sommets de m. La distance de graphe $d_{\mathrm{gr}}(u, v)$ est le nombre minimal d'arêtes nécessaires pour relier u et v dans m.

On note $V(m)$ l'ensemble des sommets de m. Alors $(V(m), d_{\mathrm{gr}})$ est un espace métrique compact.
On appelle $\mathbb{M}_n^p$ l'ensemble des p-angulations enracinées à n faces (vues à homéomorphismes près). C'est un ensemble fini.

Théorème (Le Gall, Miermont ($p = 4$), 2011)

Soit M_n une carte suivant la loi uniforme sur $\mathbb{M}_n^p$. On suppose $p = 3$ ou $p \geqslant 4$ pair. On a la convergence en loi au sens de Gromov-Hausdorff

$$\left(V(M_n), c_p n^{-\frac{1}{4}} d_{\mathrm{gr}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{m}_\infty, D^*)$$

avec $c_3 = 6^{\frac{1}{4}}$ et $c_p = \left(\frac{9}{p(p-2)}\right)^{\frac{1}{4}}$ pour p pair.
La limite $(\mathbf{m}_\infty, D^*)$ est un espace métrique compact aléatoire qui ne dépend pas de p (universalité) et est appelé la **carte brownienne**.

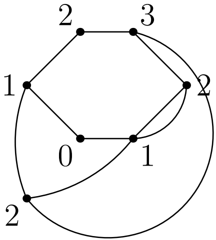
Cartes biparties

Nous nous sommes intéressés au cas plus difficile où le degré des faces n'est pas constant, en nous restreignant au cas des cartes biparties.

Cartes biparties

Définition

Une carte bipartie est une carte planaire dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles tels que deux sommets adjacents n'appartiennent pas au même sous-ensemble. C'est équivalent à dire que toutes les faces de la carte sont de degré pair.



Voici le résultat principal. Soit $\mathcal{M}_n$ une carte bipartie de loi uniforme sur l'ensemble des cartes biparties enracinées et pointées à n arêtes.

Théorème (C. Abraham)

$$\left(V(\mathcal{M}_n), (2n)^{-1/4} d_{gr}^{\mathcal{M}_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\mathbf{m}_\infty, D^*)$$

en loi pour la distance de Gromov-Hausdorff.

Arbres planaires

On représente l'ensemble des arbres planaires par

$$\mathscr{U} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$$

où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers strictement positifs et $\mathbb{N}^0 = \{\varnothing\}$ par convention.

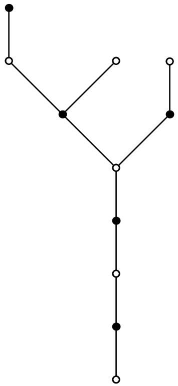
Définition

Un arbre planaire enraciné est un sous-ensemble τ fini ou infini de $\mathscr{U}$ tel que

1. $\varnothing \in \tau$, $\varnothing$ s'appelle la racine de τ ;
2. chaque élément de τ différent de $\varnothing$ a son parent dans τ ;
3. pour tout élément $u \in \tau$, il existe un entier $k_u(\tau)$ tel que pour $j \in \mathbb{N}$, $uj \in \tau$ ssi $1 \leqslant j \leqslant k_u(\tau)$.

Arbres à deux types

Ici on s'intéresse en particulier à des arbres à deux types. On dit que les sommets à génération paire sont blancs et que les sommets à génération impaire sont noirs. On note τ^0 l'ensemble des sommets blancs de τ et τ^1 l'ensemble de ses sommets noirs.



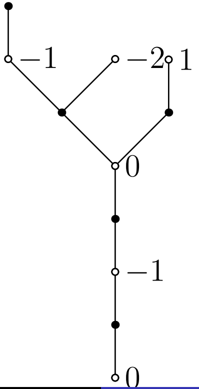
Arbres à deux types étiquetés

Définition

Un arbre planaire à deux types étiqueté est une paire $\theta = (\tau, (\ell(u))_{u \in \tau^0})$ où τ est un arbre planaire enraciné à deux types et $(\ell(u))_{u \in \tau}$ est une collection d'entiers assignés aux sommets blancs de τ vérifiant la propriété suivante. (P) : pour chaque sommet v non étiqueté de τ, les étiquettes m et k de deux sommets étiquetés adjacents à v et consécutifs quand on tourne autour de v dans le sens horaire sont telles que $k \geqslant m - 1$. L'entier $\ell(u)$ s'appelle l'étiquette de u.

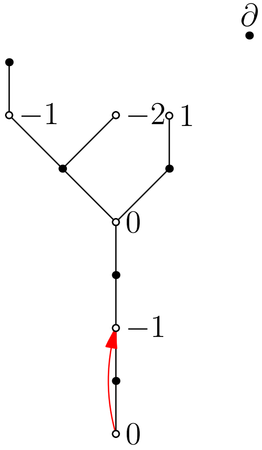
Bijection BDG

On met en bijection une carte bipartie M enracinée et pointée à n arêtes avec un arbre planaire étiqueté à deux types τ à n arêtes. On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



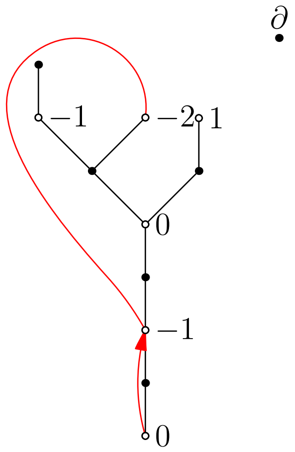
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



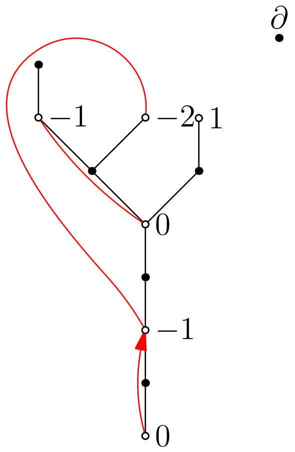
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



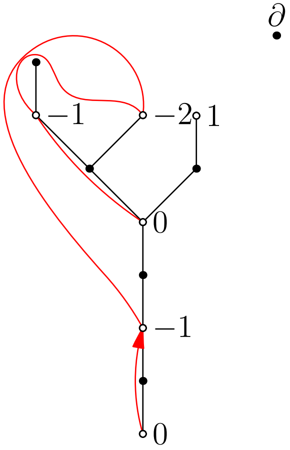
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



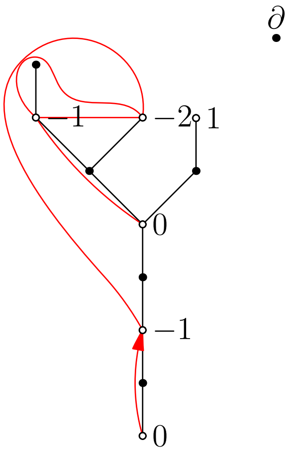
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



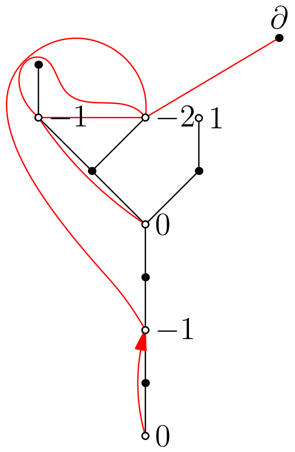
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



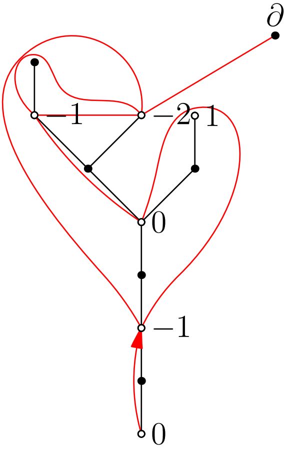
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



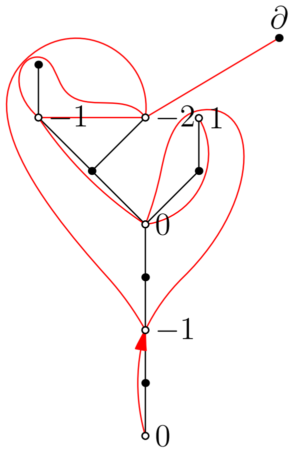
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



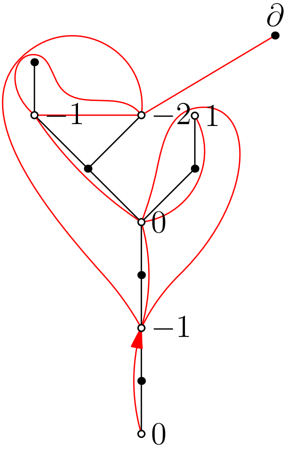
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



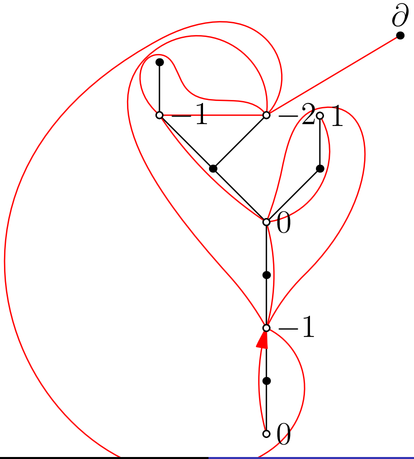
Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à n arêtes pour arriver à une carte bipartie à n arêtes.



Bijection BDG

On considère le sens où on part d'un arbre à deux types à *n* arêtes pour arriver à une carte bipartie à *n* arêtes.



Loi de l'arbre à deux types associé via la bijection BDG à une carte bipartie uniforme à n arêtes

C'est un arbre de Galton-Watson $\mathcal{T}$ à deux types dont les lois de reproduction sont données pour $k \geqslant 0$ par $\mu_0(k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ pour les sommets blancs et $\mu_1(k) = \frac{3}{8}\binom{2k+1}{k}\left(\frac{3}{16}\right)^k$ pour les sommets noirs, conditionné à avoir n arêtes.
Conditionnellement à cet arbre, les étiquettes $(\ell(u))_{u \in \mathcal{T}^0}$ suivent la loi uniforme sur l'ensemble des étiquetages possibles.
Cet arbre de Galton-Watson bitype est critique, càd $m_0 m_1 = 1$ avec m_0 et m_1 les espérances des lois μ_0 et μ_1.

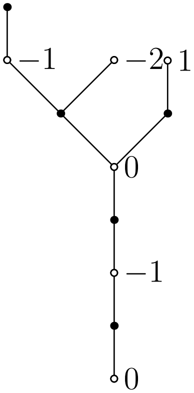


FIGURE: Arbre $\mathcal{T}$

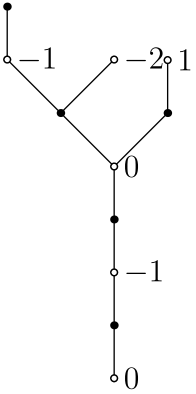


FIGURE: Arbre $\mathcal{T}$

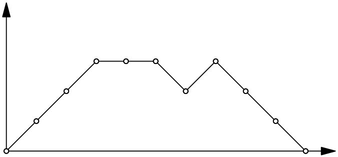


FIGURE: Fonction de contour $C^{\mathcal{T}^0}$

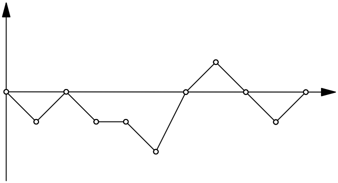


FIGURE: Fonction d'étiquette $L^{\mathcal{T}^0}$

Résultat de convergence pour les arbres à deux types

On prend un arbre de Galton-Watson à deux types $\mathcal{T}_n$ de lois de reproduction μ_0 et μ_1, conditionné à avoir n arêtes. On note $(C_{nt}^{\mathcal{T}_n^0})_{0\le t\le 1}$ et $(L_{nt}^{\mathcal{T}_n^0})_{0\le t\le 1}$ les fonctions de contour et d'étiquettes de l'arbre blanc.

Proposition

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{nt}^{\mathcal{T}_n^0}, \frac{1}{n^{1/4}} L_{nt}^{\mathcal{T}_n^0}\right)_{0\le t\le 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\mathbf{e}_t, 2^{1/4} Z_t\right)_{0\le t\le 1}$$

Quelques références

- C. Abraham, *Rescaled bipartite maps converge to the Brownian map*.
- Jérémie Bouttier, Philippe Di Francesco et Emmanuel Guitter, *Planar maps as labeled mobiles*.
- Jean Francois Le Gall, *Random trees and applications*.
- Jean-François Le Gall et Grégory Miermont, *Scaling limits of random trees and planar maps*.
- Jean-François Marckert et Grégory Miermont, *Invariance principles for random bipartite planar maps*.

MERCI !