Temps d'entrée des processus de branchement avec immigration. Critère de récurrence/transience.

Xan Duhalde, LPMA, UPMC (Paris 6)

Exposé aux JPS.

7/04/14

Prépublication.

On the hitting times of continuous-state branching processes with immigration.

X.D. (Paris VI), Clément Foucart (Paris XIII), Chunhua Ma (Nankai)

1. Les processus de branchement en temps et espace continus (CSBP).

2. Immigration et questions.

3. Nos résultats.

Plan

1. Les processus de branchement en temps et espace continus (CSBP).
2. Immigration et questions.
3. Nos résultats.

La propriété de branchement.

- $(Z_t, t \geq 0, \mathbf{P}_x, x \in \mathbb{R}_+)$ un processus de Feller décrivant une population.
- Sous $\mathbf{P}_x$, la population initiale Z_0 est de x individus.
- Z_t : quantité d'individus dans la population à l'instant t.
- $Z_{t+\mathrm{dt}}$: "enfants de Z_t".
- Le processus Z est un CSBP (Continuous State Branching Process) s'il satisfait la propriété de branchement :

$$\left.\begin{array}{c}(Z_t, t \geq 0) \sim \mathbf{P}_x \\ \perp\!\!\!\perp \\ (\tilde{Z}_t, t \geq 0) \sim \mathbf{P}_{x'}\end{array}\right\} \Longrightarrow (Z_t + \tilde{Z}_t, t \geq 0) \sim \mathbf{P}_{x+x'}$$

La classe des CSBP.

Th. (Jirina'58)

Z est un CSBP si et seulement si il existe une fonction Ψ telle que

- $\forall t, x, \lambda \geq 0, \quad \mathbf{E}_x\left[e^{-\lambda Z_t}\right] = \exp\left(-x u_t(\lambda)\right),$
- avec $\begin{cases} u_0(\lambda) & = & \lambda \\ \partial_t u_t(\lambda) & = & -\Psi\left(u_t(\lambda)\right) \end{cases},$
- où $\Psi(\lambda) = \gamma\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + \int_{(0,\infty)}(e^{-\lambda r} - 1 + \lambda r \mathbf{1}_{\{r\in(0,1)\}})\,\pi(dr),$
  avec $\gamma \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0, \int_0^\infty (1 \wedge r^2)\,\pi(\mathrm{d}r) < \infty.$

Exemples.

$$
\begin{array}{cclc}
\Psi(\lambda) = \gamma\lambda & \Longrightarrow & Z_t = Z_0 e^{-\gamma t} & \text{(déterministe).} \\
\Psi(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 & \Longrightarrow & Z_t = Z_0 + \sigma \int_0^t \sqrt{Z_s}\mathrm{d}B_s & \text{(diff. de Feller).} \\
\Psi(\lambda) = \lambda^\alpha, \alpha \in (1,2) & \Longrightarrow & \gamma = 0 = \sigma^2,\ \pi(\mathrm{d}r) = c_\alpha r^{-\alpha-1} & \text{(stable)}
\end{array}
$$

Comportement en temps long.

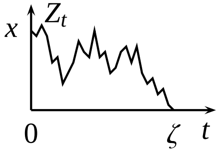
$$\mathbf{E}_x\left[Z_t\right] = xe^{-\Psi'(0+)t}.$$

On suppose ici $\Psi'(0+) = 0$ (cas critique) ou $\Psi'(0+) > 0$ (sous-critique).

Dans ce cas $\mathbf{P}_x\left(\lim_{t\to\infty} Z_t = 0\right) = 1.$

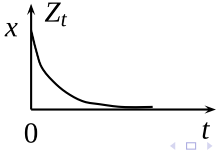
- Si $\int^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\Psi(\lambda)} < \infty$, le processus est absorbé en 0 p.s.

  $\longrightarrow$ *exemple* : $\Psi(\lambda) = \lambda^2$.



- Si $\int^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\Psi(\lambda)} = \infty$, 0 est polaire p.s.

  $\longrightarrow$ *exemple* : $\Psi(\lambda) = \lambda$.



Générateur d'un CSBP.

Le générateur d'un CSBP de mécanisme $\Psi(\gamma, \sigma, \pi)$ agit sur les fonctions de classe C^2 tendant vers 0 en l'infini comme suit :

$$Lf(x) := -\gamma x f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} x f''(x) + x \int_0^\infty (f(x+z) - f(x) - r 1_{[0,1]}(r) f'(x)) \pi(\mathrm{d}r)$$

Le *drift effectif* associé est $\mathbf{d} := \gamma + \int_0^1 r\pi(\mathrm{d}r) \in [0, \infty]$.

$$\text{Sous } \mathbf{P}_x, \quad Z_t \geq x e^{-\mathbf{d} t}.$$

Transformation de Lamperti pour les CSBP.

Th. (Lamperti'67)

Soit $\Psi(\gamma, \sigma, \pi)$ et $(X_t, t \geq 0)$ un processus de Lévy sans sauts négatifs partant de 0, d'exposant de Laplace Ψ. L'unique solution forte de l'équation

$$Z_t = x + X_{\int_0^t Z_s \mathrm{d}s},$$

est un CSBP(Ψ) partant de x.

L'équation implicite ci-dessus s'inverse et on obtient un CSBP comme un processus de Lévy changé de temps :

$$Z_t = x + X_{C_{t \wedge T_x}},$$

- T_x le temps d'atteinte de $-x$.
- $(C_t, t \geq 0)$ l'inverse càdlàg de $(I_t, t \geq 0)$,
- où $I_t = \int_0^t 1/(x + X_{s \wedge T_x}) \mathrm{d}s$.

Conséquences de la transformation de Lamperti.

- Les CSBP n'ont pas de sauts négatifs.
- Les trajectoires du CSBP sont à variations infinies si et seulement si celles du processus de Lévy sous-jacent le sont, c'est à dire ssi

$$\mathbf{d} = \gamma \; + \int_0^1 r\Pi(\mathrm{d}r) = \infty.$$

- Loi de la progéniture totale $\int_0^{\sigma_0} Z_s \mathrm{d}s$.

Plan

1. Les processus de branchement en temps et espace continus (CSBP).
2. Immigration et questions.
3. Nos résultats.

Subordinateur et immigration.

On considère toujours $(Z_t, t \geq 0, \mathbf{P}_x, x \in \mathbb{R}_+)$ un processus de Markov.

- Z_t : population à l'instant t.
- $\Psi(\gamma, \sigma, \pi)$ (code les naissances et les morts).

On ajoute une immigration dirigée par la fonction

$$\Phi(\lambda) = \ b\lambda \ + \ \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda r}\right) \nu(\mathrm{d}r) \qquad b \geq 0, \int_0^1 (1 \wedge r)\nu(\mathrm{d}r) < \infty.$$

- $(Y_t, t \geq 0)$ subordinateur d'exposant Φ.
- $Z_{t+\mathrm{d}t} = \text{"enfants de } Z_t\text{"} \ + \ \mathrm{d}Y_t$.
- Si $\Delta Y_s = y$, une quantité y d'individus rejoint la population Z au temps s.
- Immigration "continue" due au drift b du subordinateur.

La classe des CBI.

Soient $\Psi(\gamma, \sigma, \pi)$ un mécanisme de branchement et $\Phi(b, \nu)$ un mécanisme d'immigration. Un CBI(Ψ, Φ) est un processus de Feller dont le générateur est donné par

$$Lf(x) := \frac{\sigma^2}{2} x f''(x) + (b - \gamma x) f'(x) + x \int_0^\infty (f(x+r) - f(x) - r 1_{[0,1]}(r) f'(x)) \pi(\mathrm{d}r) + \int_0^\infty (f(x+r) - f(x))\, \nu(\mathrm{d}r).$$

On a, pour tous $t, \lambda, x \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbf{E}_x \left[e^{-\lambda Z_t} \right] = \exp\left(-x u_t(\lambda) - \int_0^t \Phi\left(u_s(\lambda)\right) \mathrm{d}s \right)$$

On peut montrer que pour $v := b/\mathbf{d}$, on a p.s., $\forall t \geq 0$,

$$Z_t \geq x e^{-\mathbf{d}t} + v\left(1 - e^{-\mathbf{d}t}\right).$$

Transformation de Lamperti pour les CBI.

Th. (Caballero, Garmendia, Uribe Bravo'13)

Soit $\Psi(\gamma, \sigma, \pi)$ et $\Phi(b, \nu)$. Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de Lévy sans sauts négatifs partant de 0, d'exposant de Laplace Ψ. Soit $(Y_t, t \geq 0)$ un subordinateur d'exposant Φ. L'unique solution forte de l'équation

$$Z_t = x + X_{\int_0^t Z_s \mathrm{d}s} + Y_t,$$

est un CBI(Ψ, Φ) partant de x.

Remarque : si $\Phi \not\equiv 0$, l'équation ne s'inverse pas...

Exemples.

- Ψ quelconque, $\Phi \equiv 0$
  $\longrightarrow \mathrm{CBI}(\Psi, \Phi) = \mathrm{CSBP}(\Psi)$.
- $\Psi(\lambda) = \gamma\lambda, \Phi$ quelconque
  $\longrightarrow$ le $\mathrm{CBI}(\Psi, \Phi)$ appartient à la classe bien étudiée des processus de Ornstein Uhlenbeck généralisés.
- $\Psi(\lambda) = 2\lambda^2, \Phi(\lambda) = d\lambda$
  $\longrightarrow$ le $\mathrm{CBI}(\Psi, \Phi)$ est un carré de Bessel de dimension d.
- $\Psi(\lambda) = d\lambda^{\alpha}, \Phi(\lambda) = d'\lambda^{\alpha-1}$
  $\longrightarrow$ le $\mathrm{CBI}(\Psi, \Phi)$ est auto-similaire d'indice $\alpha - 1$.
- Ψ quelconque, $\Phi(\lambda) = \Psi'(\lambda) - \Psi'(0+)$
  $\longrightarrow$ le $\mathrm{CBI}(\Psi, \Phi)$ a la loi du $\mathrm{CSBP}(\Psi)$ conditionné à ne pas s'éteindre (Lambert '01).

Des questions.

$$\begin{array}{rcl} \text{branchement } \Psi & : & \text{tendance } \searrow \\ \text{immigration } \Phi & : & \text{tendance } \nearrow \end{array}$$

- Infimum du processus partant de x ?
- Infimum atteint ? Le processus s'annule-t-il ?
- En temps long : récurrence ou transience ?

1. Pour $x \in (0, \infty)$ et $a \in [0, x]$, le temps d'entrée dans $[0, a]$ est défini par

$$\sigma_a = \inf \{t \in (0, \infty) : Z_t \in [0, a]\} .$$

2. $a \in [0, \infty)$ est *polaire* si pour tout $x \in (a, \infty)$, $\mathbf{P}_x (\sigma_a < \infty) = 0$.
3. Il y a *récurrence* s'il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\mathbf{P}_x \left(\liminf_{t \to \infty} |Z_t - x| = 0 \right) = 1.$$

Dans le cas contraire, $\mathbf{P}_x (\lim_{t \to \infty} Z_t = \infty) = 1$ (*transience*).

Réponses dans les cas particuliers.

- Ψ quelconque, $\Phi \equiv 0$
  - $\lim_{t\to\infty} Z_t = 0$ et 0 est polaire si et seulement si $\int^{\infty} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\Psi(\lambda)} = \infty$.
- $\Psi(\lambda) = 2\lambda^2, \Phi(\lambda) = d\lambda$ (carré de Bessel de dimension d).
  - 0 est polaire ssi $d \geq 2$.
  - Le processus est transient ssi $d > 2$.
  - $d = 2$: $\liminf Z_t = 0$ **et** 0 polaire.
- $\Psi(\lambda) = d\lambda^{\alpha}, \Phi(\lambda) = d'\lambda^{\alpha-1}$
  - Patie('09) : 0 est polaire si et seulement si $d' \geq d(\alpha - 1)$.
  - Patie('09) : transformée de Laplace de σ_a dans les cas $d' = 0$ et $d' = d(\alpha - 1)$.

Réponses dans les cas particuliers.

- Ψ quelconque, $\Phi(\lambda) = \Psi'(\lambda) - \Psi'(0+)$
  - Si $\Psi'(0+) = 0$, le CBI(Ψ, Ψ') est transient p.s. (Lambert '01)
  - Si $\Psi'(0+) = \rho > 0$, alors

$$Z_t \xrightarrow{\mathbf{P}_x} \infty \quad \text{ssi} \quad \int_{0+} \left(\frac{1}{\rho\lambda} - \frac{1}{\Psi(\lambda)} \right) < \infty.$$

- $\Psi(\lambda) = \gamma\lambda, \Phi$ quelconque (OU généralisé).
  - Hadjiev ('85) Expression de la transformée de Laplace de σ_a.
  - Shiga ('90) Le CBI $(\gamma\lambda, \Phi)$ est récurrent si et seulement si

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{z} \exp\left[- \int_z^1 \frac{\Phi(x)}{\gamma x} \mathrm{d}x \right] = \infty.$$

  - Patie ('05) Loi du couple $(\sigma_a, \int_0^{\sigma_a} Z_t \mathrm{d}t)$.

Critère de polarité de 0 pour Ψ, Φ généraux.

Th. (Foucart, Uribe Bravo '13)

Soit (Ψ, Φ) un couple branchement/immigration. On suppose que le mécanisme de branchement Ψ satisfait $\int^{\infty} \mathrm{d}\lambda/\Psi(\lambda) < \infty$. L'état 0 est polaire si et seulement si

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\Psi(z)} \exp\left[\int_1^z \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} \mathrm{d}u\right] = \infty.$$

Preuve : Rôle particulier de 0 : l'ensemble des zéros d'un CBI est un ensemble régénératif.

Plan

Théorème principal.

Th. (D., Foucart, Ma '14)

Soit $x > a \geq v = b/\mathbf{d}$. Pour tout $\lambda > 0$ et $\mu \geq 0$, on a

$$\mathbf{E}_x\Big[\exp\Big\{-\lambda\sigma_a - \mu\int_0^{\sigma_a} Z_t \mathrm{d}t\Big\}\Big] = \frac{f_{\lambda,\mu}(x)}{f_{\lambda,\mu}(a)},$$

où $f_{\lambda,\mu}(x) = \int_{\Psi^{-1}(\mu)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\Psi(z)-\mu} \exp\Big(-xz + \int_\theta^z \frac{\Phi(u)+\lambda}{\Psi(u)-\mu}\mathrm{d}u\Big)$, avec $\theta > \Psi^{-1}(\mu)$.

Cor.

Soit $x > a \geq v = b/\mathbf{d}$. Pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbf{E}_x\left[e^{-\lambda\sigma_a}\right] = \frac{f_{\lambda,0}(x)}{f_{\lambda,0}(a)},$$

où $f_{\lambda,0}(x) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\Psi(z)} \exp\Big(-xz + \int_1^z \frac{\Phi(u)+\lambda}{\Psi(u)}\mathrm{d}u\Big)$.

Premier corollaire : critère de polarité.

En prenant $\mu = 0$ et $\lambda \to 0$ dans le théorème précédent, on obtient :

$$\mathbf{P}_x(\sigma_a < \infty) = \frac{f_{0,0}(x)}{f_{0,0}(a)}.$$

Cor. (D., Foucart, Ma '14)

Le seul point pouvant être polaire est $v = b/\mathbf{d}$.
Si $v > 0$, il est polaire.
Si $v = 0$, il est polaire si et seulement si

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\Psi(z)} \exp\left[\int_1^z \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} \mathrm{d}u\right] = \infty.$$

- Si $\Phi \equiv 0$, on retrouve la condition de Grey : absorption si et seulement si $\int^\infty \mathrm{d}\lambda/\Psi(\lambda) < \infty$.
- Si $\Psi'(0+) = 0$ et $\Phi = \Psi'$, 0 est polaire et $\mathbf{P}_x(\sigma_a < \infty) = a/x$.

Second corollaire : critère de récurrence/transience.

Th. (D., Foucart, Ma ’14)

Le CBI(Ψ, Φ) est récurrent si et seulement si

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\Psi(z)} \exp\left[-\int_z^1 \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} \mathrm{d}x\right] = \infty.$$

Dans le cas où le processus est récurrent, on a $\liminf_{t\to\infty} Z_t = v$, $\mathbf{P}_x$ p.s.

Exemple : Si $\rho := \Psi'(0+) > 0$, $\Phi = \Psi' - \rho$, le CBI(Ψ, Φ) est récurrent si et seulement si

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{z} \exp\left[-\int_z^1 \left(\frac{1}{\rho x} - \frac{1}{\Psi(x)}\right) \mathrm{d}x\right] = \infty.$$

$\longrightarrow$ Existence d’un CSBP conditionné à la non extinction et récurrent nul.

Preuve du Théorème principal ($\mu = 0$).

- $f_\lambda(x) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\Psi(z)} \exp\left(-xz + \int_1^z \frac{\Phi(u)+\lambda}{\Psi(u)}\mathrm{d}u\right)$
- f_λ est de classe C^1 sur (v, ∞), strictement décroissante.
- C'est une fonction propre du générateur : $Lf_\lambda = \lambda f_\lambda$.
- Si $a \in (v, \infty)$, $(e^{-\lambda t \wedge \sigma_a} f_\lambda(Z_{t\wedge\sigma_a}), t \geq 0)$ est une martingale.
- $\mathbf{E}_x\left[e^{-\lambda t \wedge \sigma_a} f_\lambda(Z_{t\wedge\sigma_a})\right] = f_\lambda(x)$.
- $t \to \infty$: $f_\lambda(a)\mathbf{E}_x\left[e^{-\lambda\sigma_a}\right] = f_\lambda(x)$.