

Propagation du chaos pour un modèle de Keller-Segel sous-critique

David Godinho Pereira
(en collaboration avec Cristobal Quininao)

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, CNRS UMR 8050,
Université Paris-Est, 61 avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France

Plan

- 1 Le modèle
- 2 Résultats d'existence et d'unicité
- 3 Propagation du chaos

Plan

- 1 Le modèle
- 2 Résultats d'existence et d'unicité
- 3 Propagation du chaos

L'équation de Keller-Segel est la suivante : pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f_t(x)}{\partial t} = \chi \nabla_x \cdot ((K * f_t)(x)) f_t(x) + \Delta_x f_t(x), \quad (\mathbf{KS})$$

- $K(x) := \frac{x}{|x|^{\alpha+1}}$ avec $\alpha \in (0, 1)$ est le noyau de champ de force.
- $\alpha = 1$ pour le cas standard.
- Modèle de chimiotaxie : étude du mouvement de cellules (bactéries ou amibes) qui sont attirées par une substance chimique qu'elles produisent.

- Stevens (2000) $\rightsquigarrow$ convergence d'un système de particules en considérant un noyau régulier.

- Stevens (2000) $\rightsquigarrow$ convergence d'un système de particules en considérant un noyau régulier.
- Haskovec, Schmeiser (2011) $\rightsquigarrow$ convergence de sous-suites d'un système de particules en considérant un noyau avec un paramètre de cutoff.

- Stevens (2000) $\rightsquigarrow$ convergence d'un système de particules en considérant un noyau régulier.
- Haskovec, Schmeiser (2011) $\rightsquigarrow$ convergence de sous-suites d'un système de particules en considérant un noyau avec un paramètre de cutoff.
- Calvez, Corrias (2013) $\rightsquigarrow$ existence globale et critères d'explosion pour un système de particules dans un modèle 1-d.

- Propagation du chaos de

$$X_t^{i,N} = X_0^{i,N} - \frac{\chi}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \int_0^t K(X_s^{i,N} - X_s^{j,N}) ds + \sqrt{2} B_t^i,$$

(syst. part.)

$\forall i = 1, \dots, N$, où $(B^i)_{i=1, \dots, N}$ famille de mouvements Brownien i.i.d. dans $\mathbb{R}^2$.

- Propagation du chaos de

$$X_t^{i,N} = X_0^{i,N} - \frac{\chi}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \int_0^t K(X_s^{i,N} - X_s^{j,N}) ds + \sqrt{2} B_t^i, \quad (\text{sys. part.})$$

$\forall i = 1, \dots, N$, où $(B^i)_{i=1, \dots, N}$ famille de mouvements Brownien i.i.d. dans $\mathbb{R}^2$.

- vers

$$X_t = X_0 - \chi \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} K(X_s - x) f_s(dx) ds + \sqrt{2} B_t, \quad (\text{eds})$$

où $f_t = \mathcal{L}(X_t)$.

- $(\mathcal{L}(X_t))_{t \geq 0}$ est solution de **(KS)**.

Quelques notations

- $F \in \mathcal{P}_{sym}((\mathbb{R}^2)^N)$ avec une densité (et également un moment d'ordre positif fini).
- Entropie : $H(F) := \frac{1}{N} \int_{(\mathbb{R}^2)^N} F(x) \log F(x) dx$.
- Information de Fisher : $I(F) := \frac{1}{N} \int_{(\mathbb{R}^2)^N} \frac{|\nabla F(x)|^2}{F(x)} dx$.
- $M_1(F) := \frac{1}{N} \int_{(\mathbb{R}^2)^N} \sum_{i=1}^N |x_i| F(dx)$ où $x_i \in \mathbb{R}^2$ représente la i -ème coordonnée de $x \in (\mathbb{R}^2)^N$.

Quelques notations

- $F \in \mathcal{P}_{sym}((\mathbb{R}^2)^N)$ avec une densité (et également un moment d'ordre positif fini).
- Entropie : $H(F) := \frac{1}{N} \int_{(\mathbb{R}^2)^N} F(x) \log F(x) dx$.
- Information de Fisher : $I(F) := \frac{1}{N} \int_{(\mathbb{R}^2)^N} \frac{|\nabla F(x)|^2}{F(x)} dx$.
- $M_1(F) := \frac{1}{N} \int_{(\mathbb{R}^2)^N} \sum_{i=1}^N |x_i| F(dx)$ où $x_i \in \mathbb{R}^2$ représente la i -ème coordonnée de $x \in (\mathbb{R}^2)^N$.
- $H(f^{\otimes N}) = H(f)$, $I(f^{\otimes N}) = I(f)$ et $M_k(f^{\otimes N}) = M_k(f)$.

Plan

- 1 Le modèle
- 2 Résultats d'existence et d'unicité
- 3 Propagation du chaos

Théorème (C. Quiniao, D.G.)

- $\alpha \in (0, 1)$ et $N \geq 2$ fixés.
- $M_1(F_0^N) < \infty$ et $H(F_0^N) < \infty$.

Alors

- Il existe une unique solution forte $(X_t^{i,N})_{t \geq 0, i=1, \dots, N}$ à (**sys. part.**).
- $X_t^{i,N} \neq X_t^{j,N}$ p.s. pour tout $t \geq 0$ et $i \neq j$.
- Il existe $C = C(\chi, \sup_{N \geq 2} H(F_0^N), \sup_{N \geq 2} M_1(F_0^N))$ telle que pour tout $t \geq 0$ et $N \geq 2$

$$H(F_t^N) \leq C(1+t), \quad M_1(F_t^N) \leq C(1+t),$$

$$\int_0^t I(F_s^N) ds \leq C(1+t).$$

- $H(F_t^N) + \int_0^t I(F_s^N) ds = H(F_0^N) + \alpha_N(t)$ où
 $\alpha_N(t) \leq Ct + \frac{1}{3} \int_0^t I(F_s^N) ds.$

- $H(F_t^N) + \int_0^t I(F_s^N) ds = H(F_0^N) + \alpha_N(t)$ où $\alpha_N(t) \leq Ct + \frac{1}{3} \int_0^t I(F_s^N) ds$.
- $\mathbb{E}[|X_t^{1,N} - X_t^{2,N}|^{-\gamma}] \leq C_{\gamma,\beta} (I(F_t^N)^\beta + 1)$, où $\gamma \in (0, 2)$ et $\beta > \gamma/2$.

- $H(F_t^N) + \int_0^t I(F_s^N) ds = H(F_0^N) + \alpha_N(t)$ où $\alpha_N(t) \leq Ct + \frac{1}{3} \int_0^t I(F_s^N) ds$.
- $\mathbb{E}[|X_t^{1,N} - X_t^{2,N}|^{-\gamma}] \leq C_{\gamma,\beta}(I(F_t^N)^\beta + 1)$, où $\gamma \in (0, 2)$ et $\beta > \gamma/2$.
- $S_t = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |X_t^{i,N} - X_t^{j,N}|$.

- $H(F_t^N) + \int_0^t I(F_s^N) ds = H(F_0^N) + \alpha_N(t)$ où $\alpha_N(t) \leq Ct + \frac{1}{3} \int_0^t I(F_s^N) ds$.
- $\mathbb{E}[|X_t^{1,N} - X_t^{2,N}|^{-\gamma}] \leq C_{\gamma,\beta}(I(F_t^N)^\beta + 1)$, où $\gamma \in (0, 2)$ et $\beta > \gamma/2$.
- $S_t = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \log |X_t^{i,N} - X_t^{j,N}|$.
- $S_t = S_0 + M_t + R_t$ avec $\mathbb{E}[\sup_{[0,T]} |R_t|] \leq C \int_0^T \mathbb{E}[|X_s^{1,N} - X_s^{2,N}|^{-(\alpha+1)}] ds$.

- $\{\mathcal{L}((X_t^{1,N})_{t \geq 0}), N \geq 2\}$ est tendu dans $\mathbf{P}(C([0, \infty), \mathbb{R}^2))$.

- $\{\mathcal{L}((X_t^{1,N})_{t \geq 0}), N \geq 2\}$ est tendu dans $\mathbf{P}(C([0, \infty), \mathbb{R}^2))$.
- $\{\mathcal{L}(Q^N), N \geq 2\}$ is tight in $\mathbf{P}(\mathbf{P}(C([0, \infty), \mathbb{R}^2)))$, où
$$Q^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(X_t^{i,N})_{t \geq 0}}.$$

- $\{\mathcal{L}((X_t^{1,N})_{t \geq 0}), N \geq 2\}$ est tendu dans $\mathbf{P}(C([0, \infty), \mathbb{R}^2))$.
- $\{\mathcal{L}(Q^N), N \geq 2\}$ is tight in $\mathbf{P}(\mathbf{P}(C([0, \infty), \mathbb{R}^2)))$, où
 $Q^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(X_t^{i,N})_{t \geq 0}}$.
- La limite $f \in \mathbf{P}(C([0, \infty), \mathbb{R}^2))$ de toute sous-suite convergente de Q^N est la loi d'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de **(eds)** vérifiant

$$\forall T > 0, \quad \int_0^T I(f_s) ds < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{[0, T]} M_1(f_s) < \infty.$$

Théorème (C. Quiniao, D.G.)

Soient $\alpha \in (0, 1)$ et $f_0 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$ telle que $H(f_0) < \infty$. Il existe une unique solution forte $(X_t)_{t \geq 0}$ à **(eds)** tel que pour un $p > 2/(1 - \alpha)$,

$$(f_t)_{t \geq 0} \in L_{loc}^\infty([0, \infty), \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)) \cap L_{loc}^1([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^2)),$$

où f_t est la loi de X_t .

Théorème (C. Quiniao, D.G.)

Soient $\alpha \in (0, 1)$ et $f_0 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$ telle que $H(f_0) < \infty$. Il existe une unique solution forte $(X_t)_{t \geq 0}$ à **(eds)** tel que pour un $p > 2/(1 - \alpha)$,

$$(f_t)_{t \geq 0} \in L_{loc}^\infty([0, \infty), \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)) \cap L_{loc}^1([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^2)),$$

où f_t est la loi de X_t .

- singularité du noyau $\rightsquigarrow$ contrôlée par les estimées sur la norme L^p de la loi d'une solution.

Théorème (C. Quiniao, D.G.)

Soient $\alpha \in (0, 1)$ et $f_0 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$ telle que $H(f_0) < \infty$. Il existe une unique solution forte $(X_t)_{t \geq 0}$ à (eds) tel que pour un $p > 2/(1 - \alpha)$,

$$(f_t)_{t \geq 0} \in L_{loc}^\infty([0, \infty), \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)) \cap L_{loc}^1([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^2)),$$

où f_t est la loi de X_t .

- singularité du noyau $\rightsquigarrow$ contrôlée par les estimées sur la norme L^p de la loi d'une solution.
- non linéarité de l'EDS $\rightsquigarrow$ couplage optimal entre la loi de 2 solutions et utilisation de la distance de Wasserstein W_1 .

Théorème (C. Quiniao, D.G.)

Soit $\alpha \in (0, 1)$ et $f_0 \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$ telle que $H(f_0) < \infty$.

(i) Il existe une unique solution f à **(KS)** telle que $f \in L_{loc}^\infty([0, \infty), \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)) \cap L_{loc}^1([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^2))$ pour un $p > \frac{2}{1-\alpha}$.

(ii) Cette solution satisfait de plus pour tout $T > 0$

- $\int_0^T I(f_s) ds < \infty$,
- $\nabla_x f \in L^{2q/(3q-2)}(0, T; L^q(\mathbb{R}^2))$ pour tout $q \in [1, 2)$,
- $f \in C([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^2)) \cap C((0, \infty); L^p(\mathbb{R}^2))$ pour tout $p \geq 1$,
- pour tout $\beta \in C^1(\mathbb{R}) \cap W_{loc}^{2,\infty}(\mathbb{R})$ telle que β'' soit continue par morceaux à support compact,

$$\begin{aligned} \partial_t \beta(f) = & \chi (K * f) \cdot \nabla_x (\beta(f)) + \Delta_x \beta(f) \\ & - \beta''(f) |\nabla_x f|^2 + \chi \beta'(f_s) f_s (\nabla_x \cdot K * f_s), \end{aligned}$$

sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ dans le sens des distributions.

Plan

- 1 Le modèle
- 2 Résultats d'existence et d'unicité
- 3 Propagation du chaos**

Théorème (C. Quininao, D.G.)

- f_0 tel que $M_1(f_0) < \infty$ et $H(f_0) < \infty$.
- $(X_0^{i,N})_{i=1,\dots,N}$ famille de variables aléatoires i.i.d. de loi f_0 .
- $(X_t^{i,N})_{i=1,\dots,N,t \geq 0}$ solution de (**syst. part.**).
- $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de (**eds**).

Alors $Q^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(X_t^{i,N})_{t \geq 0}}$ converge faiblement vers $\mathcal{L}((X_t)_{t \geq 0})$ dans $\mathcal{P}(C([0, \infty), \mathbb{R}^2))$.

Théorème (C. Quininao, D.G.)

- f_0 tel que $M_1(f_0) < \infty$ et $H(f_0) < \infty$.
- $(X_0^{i,N})_{i=1,\dots,N}$ famille de variables aléatoires i.i.d. de loi f_0 .
- $(X_t^{i,N})_{i=1,\dots,N,t \geq 0}$ solution de (**syst. part.**).
- $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de (**eds**).

Alors $Q^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(X_t^{i,N})_{t \geq 0}}$ converge faiblement vers $\mathcal{L}((X_t)_{t \geq 0})$ dans $\mathcal{P}(C((0, \infty), \mathbb{R}^2))$.

- Pour tout $t \geq 0$, $Q_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}$ converge faiblement vers f_t dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

- Soit f une probabilité sur E . Une suite (F^N) de probabilités symétriques sur E^N est entropiquement f -chaotique si $F_1^N \rightarrow f$ faiblement dans $\mathcal{P}(E)$ et $H(F^N) \rightarrow H(f)$ quand $N \rightarrow \infty$, où F_1^N désigne la première marginale de F^N .

- $$H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds = H(f_0) + \chi(1 - \alpha) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_s(dx) f_s(dy)}{|x-y|^{\alpha+1}} ds.$$

- $H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds = H(f_0) + \chi(1 - \alpha) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_s(dx) f_s(dy)}{|x-y|^{\alpha+1}} ds.$
- $L := \limsup_N \left[H(F_t^N) + \int_0^t I(F_s^N) ds \right] \leq H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds.$

- $H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds = H(f_0) + \chi(1 - \alpha) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_s(dx) f_s(dy)}{|x-y|^{\alpha+1}} ds.$
- $L := \limsup_N \left[H(F_t^N) + \int_0^t I(F_s^N) ds \right] \leq H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds.$
- $L \leq H(f_0) + \limsup_N \frac{\chi(1-\alpha)}{N^2} \sum_{i \neq j} \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{1}{|X_s^{i,N} - X_s^{j,N}|^{\alpha+1}} \right] ds.$

- $H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds = H(f_0) + \chi(1 - \alpha) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_s(dx) f_s(dy)}{|x-y|^{\alpha+1}} ds.$
- $L := \limsup_N \left[H(F_t^N) + \int_0^t I(F_s^N) ds \right] \leq H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds.$
- $L \leq H(f_0) + \limsup_N \frac{\chi(1-\alpha)}{N^2} \sum_{i \neq j} \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{1}{|X_s^{i,N} - X_s^{j,N}|^{\alpha+1}} \right] ds.$
- $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{1}{|X_s^{1,N} - X_s^{2,N}|^{\alpha+1}} \right] ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_s(dx) f_s(dy)}{|x-y|^{\alpha+1}} ds.$

- $H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds = H(f_0) + \chi(1 - \alpha) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_s(dx) f_s(dy)}{|x-y|^{\alpha+1}} ds.$
- $L := \limsup_N \left[H(F_t^N) + \int_0^t I(F_s^N) ds \right] \leq H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds.$
- $L \leq H(f_0) + \limsup_N \frac{\chi(1-\alpha)}{N^2} \sum_{i \neq j} \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{1}{|X_s^{i,N} - X_s^{j,N}|^{\alpha+1}} \right] ds.$
- $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{1}{|X_s^{1,N} - X_s^{2,N}|^{\alpha+1}} \right] ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_s(dx) f_s(dy)}{|x-y|^{\alpha+1}} ds.$
- $\mathcal{L}(X_s^{1,N}, X_s^{2,N})$ converge faiblement vers $f_s \otimes f_s.$

- $H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds = H(f_0) + \chi(1 - \alpha) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_s(dx) f_s(dy)}{|x-y|^{\alpha+1}} ds.$
- $L := \limsup_N \left[H(F_t^N) + \int_0^t I(F_s^N) ds \right] \leq H(f_t) + \int_0^t I(f_s) ds.$
- $L \leq H(f_0) + \limsup_N \frac{\chi(1-\alpha)}{N^2} \sum_{i \neq j} \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{1}{|X_s^{i,N} - X_s^{j,N}|^{\alpha+1}} \right] ds.$
- $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{1}{|X_s^{1,N} - X_s^{2,N}|^{\alpha+1}} \right] ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_s(dx) f_s(dy)}{|x-y|^{\alpha+1}} ds.$
- $\mathcal{L}(X_s^{1,N}, X_s^{2,N})$ converge faiblement vers $f_s \otimes f_s.$
- $\liminf_N H(F_t^N) \geq H(f_t)$ et $\liminf_N \int_0^t I(F_s^N) ds \geq \int_0^t I(f_s) ds.$

Théorème (C. Quininao, D.G.)

- f_0 tel que $M_1(f_0) < \infty$ et $H(f_0) < \infty$.
- $(X_0^{i,N})_{i=1,\dots,N}$ famille de variables aléatoires i.i.d. de loi f_0 .
- $(X_t^{i,N})_{i=1,\dots,N,t \geq 0}$ solution de (**syst. part.**).
- $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de (**eds**).

Alors pour tout $t \geq 0$, $(X_t^{i,N})_{i=1,\dots,N}$ est entropiquement X_t -chaotique.

Théorème (C. Quininao, D.G.)

- f_0 tel que $M_1(f_0) < \infty$ et $H(f_0) < \infty$.
- $(X_0^{i,N})_{i=1,\dots,N}$ famille de variables aléatoires i.i.d. de loi f_0 .
- $(X_t^{i,N})_{i=1,\dots,N,t \geq 0}$ solution de (**syst. part.**).
- $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de (**eds**).

Alors pour tout $t \geq 0$, $(X_t^{i,N})_{i=1,\dots,N}$ est entropiquement X_t -chaotique.

- Pour tout $t \geq 0$, en notant F_{t1}^N la densité de $X_t^{1,N}$, on a $\lim_{N \rightarrow \infty} \|F_{t1}^N - f_t\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = 0$.

Perspectives

- Vitesse de convergence du système de particules.
- Se rapprocher du cas critique $\alpha = 1$.

**Merci pour votre
attention.**