Ergodicité hypocoercive

Pierre Monmarché

Institut de Mathématiques de Toulouse

Colloque JPS, 6-11 avril

Ergodicité d'un processus de Markov

- **Ingrédients** :
  - $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de markov
  - $P_t f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_t)\right]$ son semi-groupe
  - L son générateur infinitésimal, tel que $\partial_t P_t f = L P_t f$
  - μ sa mesure invariante (supposée unique et de masse 1)
- **Question** : quantifier

$$P_t f(x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mu f$$

- **Applications** :
  - Vitesse de convergence d'algorithmes stochastiques (MCMC, recuit simulé, ...)
  - Relaxation de systèmes physiques, biologiques, financiers, ...

Inégalité de Poincaré

Définitions

Variance et energie de $f_t = P_t f$:

$$\begin{array}{rcl} V_t & = & \mu(f_t^2) - (\mu f_t)^2 \\ \mathcal{E}_t & = & -2\mu f_t L f_t \quad = \quad 2\mu\left[\frac{1}{2}L(f_t)^2 - f_t L f_t\right] \end{array}$$

Par invariance de μ,

$$V_t' \quad = \quad -\mathcal{E}_t$$

Définitions

On dit que μ satisfait une inégalité de Poincaré de constante c si $\forall f$

$$\begin{array}{rrcl} & V_0 & \leq & c\mathcal{E}_0 \\ \Leftrightarrow & \int f^2 d\mu - \left(\int f d\mu\right)^2 & \leq & 2c\int \Gamma f_t d\mu. \end{array}$$

Un cas coercif

Processus de Fokker-Planck :

$$dX_t = -U'(X_t)dt + \sqrt{2\beta}dB_t$$

pour lequel

$$\begin{array}{rcl} \mu & \propto & e^{-\frac{U(x)}{\beta}}dx \\ \mathcal{E}_t & = & \mu(f')^2 \end{array}$$

Si le potentiel U est assez coercif on a une inégalité de Poincaré.

Remarque

Ce processus est réversible (L est symétrique dans $L^2(\mu)$). Dans ce cas, sont équivalents :

1. $V_t \leq CV_0e^{-\lambda t}$ pour $C \geq 1$, $\lambda > 0$
2. $V_t \leq V_0e^{-\lambda t}$
3. μ satisfait une inégalité de Poincaré

L'hypocoercivité

Définition

On parle d'hypocoercivité lorsque

$$V_t \leq C V_0 e^{-\lambda t}$$

avec nécessairement $C > 1$.

Dynamique de Langevin :

$$\begin{aligned} dX_t &= Y_t dt \\ dY_t &= -U'(X_t)dt - Y_t dt + \sqrt{2} dB_t \end{aligned}$$

pour laquelle

$$\begin{aligned} \mu &\propto e^{-U(x)-\frac{y^2}{2}} dxdy \\ \mathcal{E}_t &= \mu(\partial_y f)^2 \end{aligned}$$

Stratégie hypocoercive

Desvillettes et Villani (2001) :

$$H_t = V_t + \mu \left[(\partial_x f_t)^2 + (\partial_y f_t)^2 + \epsilon(\partial_x f_t)(\partial_y f_t) \right]$$

Dolbeault, Mouhot, Schmeiser (2009) :

$$H_t = V_t + \mu \left[f_t A f_t \right] \sim V_t$$

de telle sorte que $H_t' \leq -\lambda H_t$, et de conclure

$$V_t \leq C H_t \leq C H_0 e^{-\lambda t}$$

Approche alternative

- **Observations** :
  - Décroissance inhomogène en temps (Filbet, Mouhot, Pareschi 2006)
  - Cas gaussien explicite (Gadat, Miclo 2013), $V_t \underset{t\sim 0}{\sim} t^3$
  - lien avec les conditions d'Hörmander
- **Idée** : montrer une inégalité

$$V_t''' + bV_t'' + cV_t' + dV_t \leq 0$$

- **Problème** : c'est faux dans le cas gaussien et le processus du télégraphe circulaire.
- **Solution** : $\exists \lambda > 0$, $\nu_* \in \mathbb{R}$ et une fonction $\nu_t \geq \nu_*$ telles que

$$(\partial_t + \lambda)\Big((\partial_t + \lambda)^2 + \nu_t\Big) V_t \leq 0$$

Processus déterministe par morceaux

- Ingrédients :
  - Un flot déterministe $\phi_x(t)$
  - un taux de saut $\lambda(x)$
  - un opérateur de saut $Q(x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_+)\right]$.
- Exemple : le TCP, de générateur

$$Lf = f' + \lambda \left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x) \right)$$

- L'énergie ne fait intervenir que les sauts, discrets en espace :

$$\mathcal{E}_t = \mu\lambda \left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x) \right)^2$$

et la mesure est à peu près inconnue.

Une énergie de type diffusif

Posons

$$W_t = \mu(f_t')^2$$

et appelons inégalité de Poincaré pour ∂_x l'inégalité

$$V_t \leq cW_t$$

Alors sous l'hypothèse d'une telle inégalité et d'un équilibre entre les flots et les sauts on obtient

$$W_t' + \beta V_t' \leq -\lambda(W_t + \beta V_t)$$

Poincaré pour des PDMPs

Définition

On dit qu'un opérateur Markovien H est (c,γ) confiné si

$$\begin{aligned} \left((Hf)'\right)^2(x) &\leq \gamma H(f')^2(x) \\ Hf^2(x) - (Hf)^2(x) &\leq cH(f')^2(x) \end{aligned}$$

Soit Q l'opérateur de saut et K celui du flot :

$$Kf(x) = \mathbb{E}_x\left[f(\phi_x(T_x))\right]$$

Si K et Q sont confinés avec $\gamma_K\gamma_Q < 1$ et sous des hypothèses sur le taux de saut, μ satisfait une inégalité de Poincaré pour ∂_x.

Remarque

La variance peut être remplacé par des Φ_p-entropies et l'inégalité de Poincaré par des inégalités de Bockner.

Quelques perspectives

- Processus hybrides (mêlant flots déterministes, diffusions, sauts...)
- Cadre du calcul Γ (estimations ponctuelles plutôt qu'intégrée)
- Affaiblissement de l'hypothèse de confinement
- Processus d'ordre supérieur, du type

$$\begin{aligned} dX_t &= Y_t dt \\ dY_t &= Z_t dt \\ dZ_t &= -X_t dt + dB_t \end{aligned}$$

Références