Approximations par ortho-martingales pour des champs aléatoires

En collaboration avec Mohamed El Machkouri (LMRS)

Davide Giraudo

LMRS, Université de Rouen

9 avril 2014

Plan

1. Décomposition martingale/cobord pour les suites

2. Décomposition ortho-martingale/cobord pour les champs aléatoires

3. Application aux théorèmes limites

Plan

Définitions préliminaires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé.

Définition

La suite $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires de Ω dans $\mathbb{R}$ est strictement stationnaire si pour tout entier n, les suites $(X_{j+n})_{j\in\mathbb{Z}}$ et $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ ont la même loi.

Soit $T\colon \Omega \to \Omega$ bijective, bi-mesurable, et préservant la mesure : $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

Si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors la suite $\left(f \circ T^j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire.

Réciproquement, toute suite strictement stationnaire peut être représentée de cette manière, *i.e.*, $(f \circ T^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ a la même loi que $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ pour un certain T et un certain f.

On appelle le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un système dynamique.

La décomposition martingale/cobord

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un système dynamique et $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu telle que $\mathcal{M} \subset T^{-1}\mathcal{M}$.

Théorème (Gordin, [Gor69])

Si $f : \Omega \to R$ est une fonction de carré intégrable $\mathcal{M}$-mesurable telle que $\mathbb{E}\left(f \mid \cap_{i \in \mathbb{Z}} T^i \mathcal{M}\right) = 0$ et

$$\sum_{k \geqslant 0} \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^k \mathcal{M}\right) \right\|_2 < +\infty,$$

alors il existe des fonctions $m, g : \Omega \to R$ de carré intégrable telles que

$$f = m + g - g \circ T,$$

et m est $\mathcal{M}$-mesurable, $\mathbb{E}[m \mid T\mathcal{M}] = 0$ et g est $T\mathcal{M}$-mesurable.

On dit que m est un accroissement d'une martingale (AM).

Le terme $g - g \circ T$ est appelé cobord.

Application au théorème limite central

On cherche à étudier le comportement asymptotique de $S_n(f) := \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$.

Si T est ergodique, alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_n(m) \to \sqrt{\mathbb{E}[m^2]} \cdot \mathcal{N}(0,1) \text{ en loi,}$$

où $\mathcal{N}(0,1)$ désigne une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Comme $S_n(g - g \circ T) = g - g \circ T^n$, $n^{-1/2} S_n(g - g \circ T) \to 0$ presque sûrement donc en probabilité.

Donc, sous les conditions $\sum_{k \geqslant 0} \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^k \mathcal{M}\right)\right\|_2 < +\infty$ et $\mathbb{E}\left(f \mid \cap_{i \in \mathbb{Z}} T^i \mathcal{M}\right) = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_n(f) \to \sqrt{\mathbb{E}[m^2]} \cdot \mathcal{N}(0,1) \text{ en loi.}$$

Application au principe d'invariance

On pose

$$S_n^{\mathrm{pl}}(f)(t) := \sum_{j=1}^{[nt]} f \circ T^j + (nt - [nt]) f \circ T^{[nt]+1}.$$

Alors sous les conditions précédentes,

$$n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}(f) \to \sqrt{\mathbb{E}[m^2]} \cdot W \text{ en loi dans } C[0,1],$$

où W est un mouvement brownien standard.

Idées

- Pour les accroissements de martingales m, on dispose d'inégalités sur le maximum des sommes partielles :

$$\mathbb{E}\left(\max_{1 \leqslant n \leqslant N} |S_n(m)|^p\right) \leqslant C_p \mathbb{E}\left|S_N(m^2) \circ T^j\right|^{p/2}, p \geqslant 2.$$

- On peut donc contrôler le module de continuité de $n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}(m)$.
- Comme $g \in \mathbb{L}^2$, $n^{-1/2} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left|g \circ T^j\right| \to 0$ en probabilité.

Plan

2 Décomposition ortho-martingale/cobord pour les champs aléatoires

Position du problème

Objectif : étendre la décomposition martingale/cobord aux champs aléatoires, *i.e.*, aux processus indexés par $\mathbb{Z}^d$ ($d \geqslant 2$) au lieu de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$.

Problèmes :

1. bien définir ce qui va jouer le rôle de martingale (la notion de passé est moins claire car on ne dispose pas d'une relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}^d$) ;

2. choix de la sous-tribu qui va jouer le rôle de $\mathcal{M}$ dans le cas $d = 1$;

3. si $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sont deux suites indépendantes, toutes deux i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on pose $Z_{i,j} := X_i Y_j$. C'est un champ de type différence de martingale pour « toute définition raisonnable » mais on n'a pas de théorème limite central.

Notations

Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{Z}^d$. On dit que $\mathbf{s} \preceq \mathbf{t}$ si $s_j \leqslant t_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\} =: \langle d \rangle$. On pose $\min(\mathbf{s}, \mathbf{t}) := (\min(s_j, t_j))_{1 \leqslant j \leqslant d}$. On note $\mathbf{e_i} := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ pour $i \in \langle d \rangle$.

Définition

Une famille $(\mathcal{G}_\mathbf{i})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est une filtration commutante si

- $\mathcal{G}_\mathbf{i} \subset \mathcal{G}_\mathbf{j} \subset \mathcal{F}$ pour tous $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ vérifiant $\mathbf{i} \preceq \mathbf{j}$, et
- pour tous $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$ et toute variable aléatoire bornée Z,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Z \mid \mathcal{G}_\mathbf{s}\right) \mid \mathcal{G}_\mathbf{t}\right) = \mathbb{E}\left(Z \mid \mathcal{G}_{\min(\mathbf{s}, \mathbf{t})}\right).$$

Définition (cf. [Kho02])

Un champ aléatoire $(X_\mathbf{k})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ de différences d'ortho-martingales (DOM) s'il existe une filtration commutante $(\mathcal{G}_\mathbf{k})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ telle que $X_\mathbf{k}$ est $\mathcal{G}_\mathbf{k}$-mesurable pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ et $\mathbb{E}\left(X_k \mid \mathcal{G}_\mathbf{l}\right) = 0$ pour tous $\mathbf{l} \preceq \mathbf{k}$ avec $\mathbf{l} \neq \mathbf{k}$.

Choix de $\mathcal{M}$

Lemme

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois sous-tribus de $\mathcal{F}$ mutuellement indépendantes. Alors pour toute v.a. intégrable X,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{A} \vee \mathcal{B}\right) \mid \mathcal{B} \vee \mathcal{C}\right) = \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{B}\right).$$

Soit pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, $T^{\mathbf{k}} \colon \Omega \to \Omega$ un opérateur préservant la mesure, de sorte que $T^{\mathbf{k}+\mathbf{l}} = T^{\mathbf{k}} \circ T^{\mathbf{l}}$ pour tous $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$.

On suppose que $\varepsilon_{\mathbf{i}} := h \circ T^{\mathbf{i}}$ sont i.i.d. (par exemple si on prend un système dynamique de type Bernoulli). On pose

$$\mathcal{M} := \sigma(\varepsilon_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \preceq \mathbf{0}).$$

En posant $\mathcal{G}_{\mathbf{i}} := T^{-\mathbf{i}}\mathcal{M}$, on obtient par le lemme une filtration commutante.

Cas de la dimension $d = 2$

Soient $T^{\mathbf{k}}$ et $\varepsilon_{\mathbf{i}}$ comme précédemment, et on pose $U^{\mathbf{i}}(f)(\omega) := f(T^{\mathbf{i}}\omega)$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$.

Théorème (El Machkouri, G., [EMG14])

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathcal{M})$, $\mathbb{E}(f) = 0$. On suppose que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^{k\mathbf{e_1}}\mathcal{M}\right) \right\|_2 < \infty \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} k \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^{k\mathbf{e_2}}\mathcal{M}\right) \right\|_2 < +\infty.$$

Alors f admet la décomposition

$$f = m + (I - U_1)m_1 + (I - U_2)m_2 + (I - U_1)(I - U_2)g,$$

où $(U^{\mathbf{i}}m)_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2}$ est un champ DOM, $(U^{k\mathbf{e_2}}m_1)_{k \geqslant 0}$ et $(U^{k\mathbf{e_1}}m_2)_{k \geqslant 0}$ sont des suites DM, et $m, m_1, m_2, g \in \mathbb{L}^2$.

Exemple : processus linéaire

Soit $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}} \subset \mathbf{R}$ tels que $\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{i,j}^2 < +\infty$ et

$$f := X_0 = \sum_{i\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0} a_{i,j}\cdot\varepsilon_{-i,-j}.$$

Comme

$$\left\|\mathbb{E}\left(f \mid T^{ke_1}\mathcal{M}\right)\right\|_2 = \left\|\sum_{i\geqslant k}\sum_{j\geqslant 0} a_{i,j}\cdot\varepsilon_{-i,-j}\right\|_2 = \sqrt{\sum_{i\geqslant k}\sum_{j\geqslant 0} a_{i,j}^2},$$

on aura une décomposition ortho-martingale/cobord si les séries

$$\sum_{k\geqslant 1} k\sqrt{\sum_{i\geqslant k}\sum_{j\geqslant 0} a_{i,j}^2} \text{ et } \sum_{k\geqslant 1} k\sqrt{\sum_{j\geqslant k}\sum_{i\geqslant 0} a_{i,j}^2}$$

sont convergentes.

Cas $d \geqslant 2$ arbitraire

Théorème (El Machkouri, G., [EMG14])

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathcal{M})$, $\mathbb{E}(f) = 0$. *On suppose que*

$$\text{pour tout } s \in \langle d \rangle, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^{d-1} \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^{k\mathbf{e_s}} \mathcal{M} \right) \right\|_2 < \infty.$$

Alors f *admet la décomposition*

$$f = m + \sum_{\emptyset \subsetneq J \subsetneq \langle d \rangle} \prod_{s \in J} (I - U^{\mathbf{e_s}}) m_J + \prod_{s=1}^{d} (I - U^{\mathbf{e_s}}) g,$$

où

- m, g *et* m_J *sont de carré intégrable ;*
- $\left(U^{\mathbf{i}} m\right)_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ *est un champ de type DOM et pour tout* $\emptyset \subsetneq J \subsetneq \langle d \rangle$, $\left(U^{\mathbf{i}}_{J^c} m_J\right)_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^{d-|J|}}$ *est un champ de type DOM.*

Plan

3 Application aux théorèmes limites

Principe d'invariance dans $C[0,1]^d$

Soit $(X_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire strictement stationnaire. On pose

$$S_n(\mathbf{t}) := \sum_{\mathbf{i}\in\langle n\rangle^d} \lambda([0, n\mathbf{t}] \cap R_{\mathbf{i}}) X_{\mathbf{i}},$$

où $R_{\mathbf{i}} =]i_1 - 1, i_1] \times \cdots \times]i_d - 1, i_d]$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On dit que le principe d'invariance a lieu si $\{n^{-d/2} S_n(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in [0,1]^d\}_{n\geqslant 1}$ converge en loi dans $C[0,1]^d$ vers un drap brownien.

Corollaire

Si $f \in \mathbb{L}^2$ admet la décomposition

$$f = m + \sum_{\emptyset \subsetneq J \subsetneq \langle d\rangle} \prod_{s\in J} (I - U^{\mathbf{e}_s}) m_J + \prod_{s=1}^{d} (I - U^{\mathbf{e}_s}) g,$$

où m et les m_J sont des champs de type DOM de carré intégrable et $g \in \mathbb{L}^2$, alors $(f \circ T^{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ vérifie le principe d'invariance.

Perspectives

1. Théorème limite central en sommant sur des ensembles non rectangulaires.
2. Principe d'invariance dans le cadre d'espace hölderiens.
3. Loi des logarithmes itérés.
4. Inégalités de grandes déviations, inégalités exponentielles.

Bibliographie

M. El Machkouri and D. Giraudo, *Martingale approximation for random fields*, Travail en cours, 2014.

M. I. Gordin, *The central limit theorem for stationary processes*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **188** (1969), 739–741. MR 0251785 (40 #5012)

Davar Khoshnevisan, *Multiparameter processes*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2002, An introduction to random fields. MR 1914748 (2004a :60003)