Processus de contact avec ralentissements aléatoires

Kevin Kuoch

Université Paris Descartes, France

avril 2014

Plan

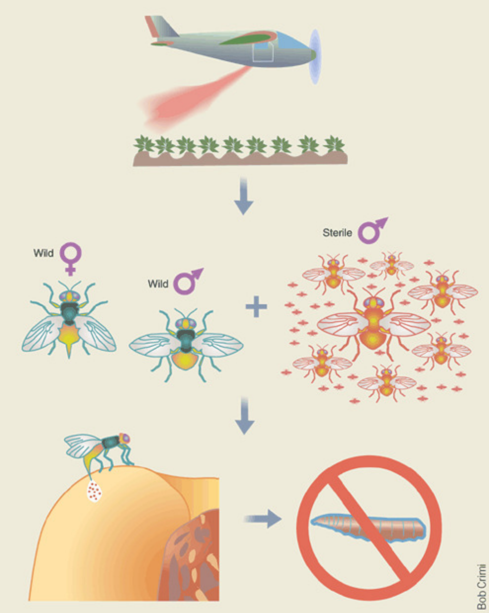
Motivation

Technique du mâle stérile : R. Bushland and E. Knipling 50s

Contrôle biologique où des individus stériles sont relâchés au sein d'une population d'insectes à contrôler. Une femelle s'accouple avec un mâle stérile: couple sans progéniture, réduisant la génération suivante.

Achèvements: Lucilie bouchère (America-Lybia), Tsetse (Zanzibar), ...
Travaux actuels: Moustiques *Anopheles* (malaria) et *Aedes* (dengue, fièvre jaune), ...

But: optimiser le taux d'individus à insérer et le coût induit.
Ex: coût estimé pour la mouche tsé-tsé en Afrique sub-saharienne $\sim 3\overline{M}$€/an (*source: Food and Agriculture Organization*)



Ernest Wimmer. Eco-friendly insect management. Nature 23, 432 - 433, 2005.

Réponse

On modélise ce phénomène via un système de particules en interaction où figurent plusieurs types: type = catégorie de population (fertile/stérile/les deux).

On montre qu'il n'est pas nécessaire de surnombrer la population stérile pour éradiquer la population fertile mais qu'il existe une transition de phase (global) selon le taux d'insertion des individus stériles (local).

limite hydrodynamique: passer d'une description microscopique de l'évolution des types de population à une description macroscopique de l'évolution des densités respectives des types.

Introduction

Début 70s: F. Spitzer [1969-1970] et R.L. Dobrušin [1971]

Evolution en temps et en espace d'une infinité de particules indistinguables, régies par une interaction locale forte et aléatoire.

Processus de Markov $(\eta_t)_{t\geq 0}$ à temps continu d'espace d'état

$$\Omega = F^S,$$

où F : ensemble **fini** dénombrable (e.g. sous ensemble de $\mathbb{N}$) et S : ensemble discret **infini** (e.g. $\mathbb{Z}^d$, T^d, graphe, ...)

Une **configuration** $\eta \in \Omega$ est décrite par l'**état** de chaque site $x \in S$, donné par

$$\eta(x) \in F.$$

T.M. Liggett, *Interacting Particle Systems*, 2005.

Évolution en temps et en espace

Dès lors, $S = \mathbb{Z}^d$.

$\rightarrow$ **générateur infinitésimal** $\mathcal{L}$. Pour toute fonction cylindrique $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} c(x, \eta)(f(\eta_x) - f(\eta)),$$

où $c(x, \eta)$, qui **dépend** de la configuration η sur un voisinage de x, est le taux de transition de la configuration η vers la configuration η_x avec

$$\eta_x(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{si } z \neq x \\ y & \text{si } z = x \end{cases}$$

Origines et Motivations

Physique statistique:

- modèle d'Ising
- modèles d'exclusion: SSEP, ASEP, TASEP

Cadre biologique et écologique: modèles aléatoires spatiaux

- contact (propagation d'épidémies, évolution de populations)
- votant (Wright-Fisher spatial)
- modèles de compétition (Inghe, Crawley-May,...)

S. Levin

E. Andjel, M. Bramson, R. Durrett, T.M. Liggett, T. Mountford, C. Neuhauser, R. Schinazi, J. Schweinsberg, G. Swindle, ...

Processus de Contact: Définition

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. $\xi_t \in \Omega$.

0 (vide) ou 1 (occupé)

Taux de transition infinitésimal en $x \in S$:

$$\begin{aligned} &1 \to 0 \text{ à taux } 1 \\ &0 \to 1 \text{ à taux } \lambda_1 \sum_{y:|y-x|=1} \mathbf{1}\{\xi(y)=1\} \end{aligned}$$

où $\lambda_1 > 0$ est un paramètre [taux de croissance].

$\to$ Comportement par rapport à λ_1 ?

Transition de phase sur $\mathbb{Z}^d$

Soit $A_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \xi_t(x) = 1\}$. Survie $S^0 = \{A_t \neq \emptyset \ \forall t \geq 0 | A_0 = \{0\}\}$.

Théorème (Harris 1974, Holley et Liggett 1976)

Il existe une et une seule valeur critique $\lambda_c(d) \in (0, \infty)$ telle que

(i) si $\lambda_1 < \lambda_c(d)$, alors le processus meurt : $\mathbb{P}_{\lambda_1}(S^0) = 0$.

(ii) si $\lambda_1 > \lambda_c(d)$, alors le processus survit : $\mathbb{P}_{\lambda_1}(S^0) > 0$.

Cas critique par C. Bezuidenhout et G. Grimmett (1990): extinction.

Preuve:

- Comparaison avec percolation quand $d = 1$ (Harris, 1974)
- Comparaison avec autres systèmes connus (Ising et contact généralisés) en plus grande dimension.

Contact et Ralentissements aléatoires

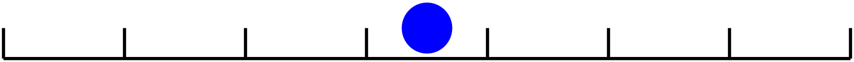
Ralentissements spontanés à taux $r > 0$. Espace de valeurs $\{0, 1, 2, 3\}$:
(0): site vide / (1): fertile / (2): stérile / (3): ralenti (compétition).

$0 \to 1$ à taux $\lambda_1(\sharp$ voisins '1'$) + \lambda_2(\sharp$ voisins '3'$)$	$1 \to 0$ à taux 1
$1 \to 3$ à taux r	$3 \to 1$ à taux 1
$2 \to 3$ à taux $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_3$	$1 \to 3$ à taux 2
$0 \to 2$ à taux r	$2 \to 1$ à taux 1

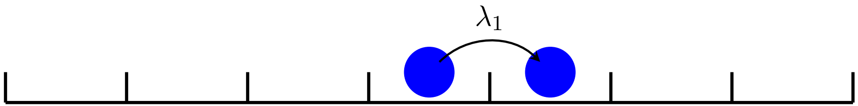
- Si un invididu stérile (2) atterrit sur un site occupé (1) ou si ralenti ou une naissance (1) a lieu sur un site stérilisé (2), la population est ralentie (3) : taux de naissance $\lambda_2 < \lambda_1$.

$\to$ ralentissements = **environnement aléatoire dynamique**.

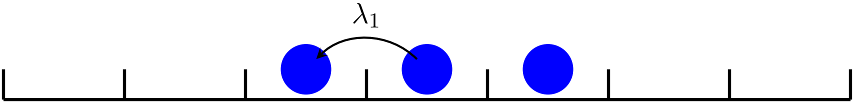
sur $\mathbb{Z}^1$



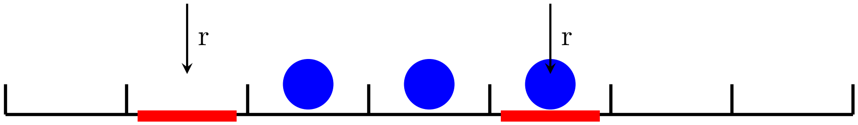
sur $\mathbb{Z}^1$



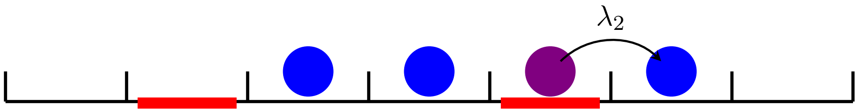
sur $\mathbb{Z}^1$



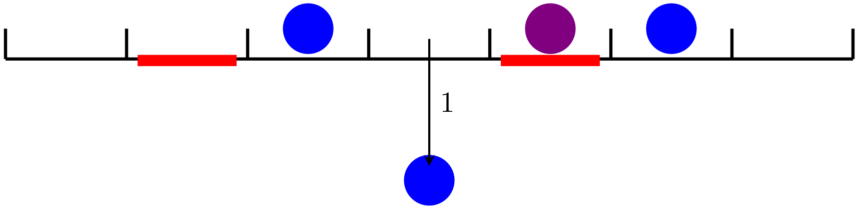
sur $\mathbb{Z}^1$



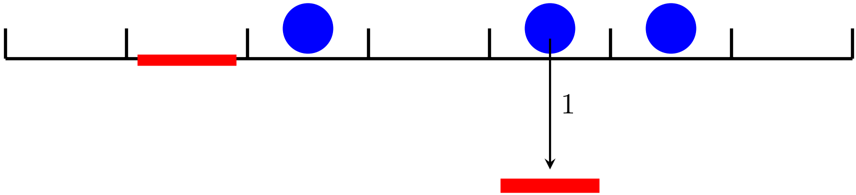
sur $\mathbb{Z}^1$



sur $\mathbb{Z}^1$

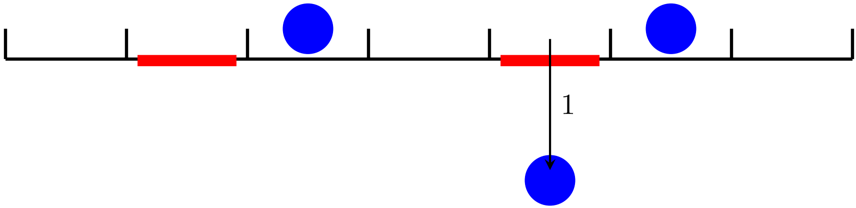


sur $\mathbb{Z}^1$



sur $\mathbb{Z}^1$

ou bien



Existence et Unicité d'une transition de phase en r

Soit $B_t = \{x : \eta_t = 1 \text{ ou } 3\}$. Survie $S^0 = \{B_t \neq \emptyset \ \forall t \geq 0 | B_0 = \{0\}\}$.
Soit

$$r_c = r_c(d) := \sup\{r : \mathbb{P}_r(S) > 0\}$$

Théorème

Supposons $\lambda_2 < \lambda_c < \lambda_1$. Il existe une et une seule valeur $r_c(\lambda_1, \lambda_2, d) \in (0, \infty)$ telle que :

Si $r > r_c$ alors la population s'éteint.

Si $r < r_c$ alors la population survit.

Si $r = r_c$ alors la population s'éteint.

Preuve :
- Existence de deux régimes - via percolation (Durrett, 1993)
- Monotonie du processus et couplage de base
- Cas critique : renormalisation par blocs dynamiques (Grimmett et al.)

Environnement aléatoire gelé (quenched)

Sur $\mathbb{Z}^1$, soit $p = r(r+1)^{-1}$: un site est fixé **ralenti** avec proba p ou **non** avec proba $1-p$. On lance le contact sur cet environnement ω aléatoire fixé. Pour $k \in \mathbb{Z}^1$, $\lambda(k) = \lambda_1 \omega(k) + \lambda_2(1-\omega(k))$.

$$r_t = \sup(k \in \mathbb{Z} : \eta_t(k) = 1),\ l_t = \inf(k \in \mathbb{Z} : \eta_t(k) = 1).$$

Théorème

i. Extinction si $\mathbb{E}_r^\omega \log \lambda(0) < 0$.

ii. Si $\mathbb{E}_r^\omega \log \lambda(k) > -\infty$ *et* $\mathbb{E}_r^\omega \log \frac{\lambda(k) + \lambda(k-1) + 1}{\lambda(k)\lambda(k-1)} < 0$. *Alors*

$$\limsup_{t\to\infty} r_t = +\infty \quad ou \quad \liminf_{t\to\infty} l_t = -\infty.$$

Preuve: adaptation de résultats de T.M. Liggett, 1992.

(i) donne extinction si $r > -\dfrac{\log \lambda_1}{\log \lambda_2}$

Limite hydrodynamique

= **Changement d'échelle**

À **échelle microscopique**: individus sur un espace discret (e.g. $\frac{1}{N}\mathbb{Z}^d$) régis par une dynamique aléatoire (interactions locales) dont le temps est accéléré.

on change d'échelle (accélère en temps et redimensionne en espace) et on arrive...

À **échelle macroscopique**: densités de populations gouvernées par une dynamique déterministe.

Équations de champ moyen

Modèle de champ moyen (déterministe, non spatial) : tous les types de particules se mixent.

Soit $u_i \in [0,1]$ la densité du type i, en particulier $\sum u_i = 1$. Les densités évoluent selon le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} u_1' = 2d(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3)u_0 + u_3 - u_1(r+1) \\ u_2' = ru_0 + u_3 - \big(1 + 2d(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3)\big)u_2 \\ u_3' = 2d(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_3)u_2 + ru_1 - 2u_3 \end{cases} \tag{1}$$

En ajoutant un phénomène de diffusion, la partie réaction (partie contact avec ralentissements) converge vers ces équations de champ moyen.

La diffusion: échange

Diffusion: échanger deux valeurs de deux sites voisins:

$$\eta(x) \longleftrightarrow \eta(y), \text{ pour } x, y \in S \text{ s.t. } x \sim y$$

$\rightarrow$ processus de Markov de générateur $\mathcal{L}^D$.

On considère le processus de réaction-diffusion: $\mathcal{L} = N^2 \mathcal{L}^{\mathcal{D}} + \mathcal{L}^R$, où $\mathcal{L}^R$ correspond à la partie contact avec ralentissements.

La mesure empirique du type i, $\pi_t^{N,i}$, est définie par:

$$\pi_t^{N,i} := \frac{1}{N^d} \sum_{T_N^d} \delta_{\frac{x}{N}} \mathbf{1}\{\eta(x) = i\}$$

soit le vecteur $\widehat{\pi}_t^N = (\pi_t^{N,1}, \pi_t^{N,2}, \pi_t^{N,3})$

On dit qu'une suite de probabilités $(\mu^N)_{N\geq 1}$ est associée à un profil continu $\widehat{\gamma}(\cdot) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)(\cdot)$ si:

$$\limsup_{n\to\infty} \mu^N \left(\left| \langle \widehat{\pi}^N, \widehat{G} \rangle - \int \widehat{G}(\theta)\widehat{\gamma}(\theta)d\theta \right| > \epsilon \right) = 0$$

pour toute fonction continue $\widehat{G} = (G_1, G_2, G_3)$ à support compact.
La mesure empirique du processus, $(\widehat{\pi}_t^N)_t$ vérifie

Théorème

La suite $\{\widehat{\pi}_t^N, N \geq 1\}$ converge en probabilité quand $N \to \infty$ vers la mesure absolument continue $\widehat{\pi}_t(d\theta) = \widehat{\rho}(t,\theta)d\theta$, où $\widehat{\rho}(t,\theta) = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)(t,\theta)$ est l'unique solution faible du système de R-D:

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 = \Delta\rho_1 + 2d(\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_3)\rho_0 + \rho_3 - (r+1)\rho_1 \\ \partial_t \rho_2 = \Delta\rho_2 + r\rho_0 + \rho_3 - (1 + 2d(\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_3))\rho_2 \\ \partial_t \rho_3 = \Delta\rho_3 + 2d(\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_3)\rho_2 + r\rho_1 - 2\rho_3 \\ \widehat{\rho}(0,\cdot) = \widehat{\gamma}(\cdot) \end{cases}$$

merci pour votre attention

Liggett, Thomas M. Interacting particle systems. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

Harris, T. E. Contact interactions on a lattice. Ann. Probability 2 (1974), 969–988.

Durrett, Rick Ten lectures on particle systems. Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1993), 97–201, Springer, Berlin, 1995.

Liggett, Thomas M. The survival of one-dimensional contact processes in random environments. Ann. Probab. 20 (1992), no. 2, 696–723.

Kipnis, Claude; Landim, Claudio Scaling limits of interacting particle systems. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 320. Springer-Verlag, Berlin, 1999.