# Comportement en temps long de diffusions interagissant à travers leur rang

Julien Reygner

École des Ponts ParisTech et Université Pierre et Marie Curie

Colloque des Jeunes Probabilistes et Statisticiens
7 avril 2014

# Introduction

On s'intéresse à l'**équation aux dérivées partielles**

$$\boxed{\partial_t F_t(x) = \frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2 F_t(x) - \partial_x \left(B(F_t(x))\right),}$$

où $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

Cette formulation décrit une classe assez générale de modèles physiques (lois de conservation, équation de Burgers, etc.).

**But de l'exposé**

Peut-on décrire le **comportement en temps long** de $F_t$, en particulier établir des résultats de (vitesse de) **convergence à l'équilibre** ?

# Plan

# Pourquoi c'est un problème de probabilités ?

Supposons que $F_0$ est la **fonction de répartition** d'une **mesure de probabilité** $m$ sur $\mathbb{R}$ :

$$F_0 = H * m.$$

On cherche alors des solutions telles que, pour tout $t \geq 0$, $F_t$ **reste la fonction de répartition d'une mesure de probabilité** :

$$F_t = H * P_t.$$

- Existe-t-il un **processus** $(X(t))_{t \geq 0}$ tel que $P_t = \mathrm{Loi}(X(t))$ ?
- Le comportement en temps long de $(X(t))_{t \geq 0}$ peut-il être étudié par des méthodes **probabilistes** ?

# Équation de Fokker-Planck non-linéaire

Formellement, $P_t = \partial_x F_t$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t P_t = \dfrac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 P_t - \partial_x (b(H * P_t) P_t), \\ P_0 = m, \end{cases}$$

où $b = B'$.

➩ **Équation de Fokker-Planck** du processus de diffusion

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = b(H * P_t(X(t)))\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B(t), \\ X(0) \sim m, \end{cases}$$

où, pour tout $t \geq 0$, $P_t = \mathrm{Loi}(X(t))$.

➩ Les coefficients de la diffusion **dépendent de la loi entière** $P_t$ de $X(t)$ ; cette EDS est dite **non-linéaire** au sens de McKean.

# Diffusions interagissant à travers leur rang I

Procédure de **linéarisation** classique :

- prenons $n$ copies $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$ dirigées par $B_1, \ldots, B_n$ indépendants ;
- remplaçons la loi $P_t$ par la **mesure empirique**

$$\mu_t^n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_{i,n}(t)}.$$

➩ On remplace la **non-linéarité** par de l'**interaction**.

## Système de diffusions interagissant à travers leur rang

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_{i,n}(t) = b\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{j,n}(t) \leq X_{i,n}(t)\}}\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_i(t), \\ (X_{1,n}(0), \ldots, X_{n,n}(0)) \sim m^{\otimes n}. \end{cases}$$

**Remarque :** la particule en $k$-ème position a **une dérive constante** $b(k/n)$.

# Diffusions interagissant à travers leur rang II

Ce type de système de particules apparaît :

- dans des modèles de **marchés financiers** (Fernhloz, Karatzas, Pal, ...) ;
- en théorie des **files d'attentes browniennes** (Harrison, Williams) ;
- en **mécanique statistique** (Aizenmann, Arguin).

## Propagation du chaos

Lorsque $n \to +\infty$, $\mu^n$ **échantillonne** $P$ et les particules se comportent asymptotiquement comme des **copies i.i.d. du processus non-linéaire**.

**Bilan :**

# Diffusions interagissant à travers leur rang II

Ce type de système de particules apparaît :

- dans des modèles de **marchés financiers** (Fernhloz, Karatzas, Pal, ...) ;
- en théorie des **files d'attentes browniennes** (Harrison, Williams) ;
- en **mécanique statistique** (Aizenmann, Arguin).

## Propagation du chaos

Lorsque $n \to +\infty$, $\mu^n$ **échantillonne** $P$ et les particules se comportent asymptotiquement comme des **copies i.i.d. du processus non-linéaire**.

**Bilan :**

**EDP non-linéaire**

# Diffusions interagissant à travers leur rang II

Ce type de système de particules apparaît :

- dans des modèles de **marchés financiers** (Fernhloz, Karatzas, Pal, ...) ;
- en théorie des **files d'attentes browniennes** (Harrison, Williams) ;
- en **mécanique statistique** (Aizenmann, Arguin).

## Propagation du chaos

Lorsque $n \to +\infty$, $\mu^n$ **échantillonne** $P$ et les particules se comportent asymptotiquement comme des **copies i.i.d. du processus non-linéaire**.

**Bilan :**

**EDP non-linéaire**

$\downarrow$ décrit la loi du

**processus de diffusion non-linéaire**

# Diffusions interagissant à travers leur rang II

Ce type de système de particules apparaît :

- dans des modèles de **marchés financiers** (Fernhloz, Karatzas, Pal, ...) ;
- en théorie des **files d'attentes browniennes** (Harrison, Williams) ;
- en **mécanique statistique** (Aizenmann, Arguin).

## Propagation du chaos

Lorsque $n \to +\infty$, $\mu^n$ **échantillonne** $P$ et les particules se comportent asymptotiquement comme des **copies i.i.d. du processus non-linéaire**.

**Bilan :**

**EDP non-linéaire**

↓ décrit la loi du

**processus de diffusion non-linéaire**

↓ qui est approché par le

**système de particules**

# Diffusions interagissant à travers leur rang II

Ce type de système de particules apparaît :

- dans des modèles de **marchés financiers** (Fernhloz, Karatzas, Pal, ...) ;
- en théorie des **files d'attentes browniennes** (Harrison, Williams) ;
- en **mécanique statistique** (Aizenmann, Arguin).

## Propagation du chaos

Lorsque $n \to +\infty$, $\mu^n$ **échantillonne** $P$ et les particules se comportent asymptotiquement comme des **copies i.i.d. du processus non-linéaire**.

**Bilan :**

**EDP non-linéaire**

↓ décrit la loi du

**processus de diffusion non-linéaire**

« Difficile »

↓ qui est approché par le

**système de particules**

« Facile »

# Plan

Interprétation probabiliste

**Comportement en temps long du système de particules**

Comportement en temps long du processus non-linéaire

# Recentrage du système de particules

**Remarque importante :** le long de la direction $(1, \dots, 1)$,

$$\mathrm{d}(X_{1,n}(t) + \cdots + X_{n,n}(t)) = \bar{b}\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{n}\mathrm{d}\beta(t),$$

où $\bar{b} := \sum_{k=1}^{n} b\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\beta := \frac{B_1 + \cdots + B_n}{\sqrt{n}}$ est un brownien standard.

➩ On **ne peut pas** s'attendre à un équilibre pour $(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$.

➩ **Projetons** donc sur l'hyperplan orthogonal

$$\mathcal{M}_n := \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1 + \cdots + y_n = 0\}.$$

- **Recentre le système de particules** autour de son centre de masse.
- On obtient $Y = (Y_{1,n}, \dots, Y_{n,n})$ **diffusion dans** $\mathcal{M}_n$, qui vérifie

$$\mathrm{d}Y_{i,n}(t) = \left(b\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_{j,n}(t) \leq Y_{i,n}(t)\}}\right) - \frac{\bar{b}}{n}\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\bar{B}_{i,n}(t),$$

  avec $\bar{B} := (\bar{B}_{1,n}, \dots, \bar{B}_{n,n})$ brownien corrélé.
- **Propagation du chaos** : $Y_{1,n}$ converge en loi vers processus non-linéaire.

# Mesure invariante

Système recentré : la particule en $k$-ème position a une dérive $b(k/n) - \bar{b}/n$.
**Hypothèse naturelle** pour assurer confinement : $b$ **strictement décroissante**.

- Pour $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{M}_n$, notons $y_{(1)} \leq \cdots \leq y_{(n)}$ le **réordonnement croissant** de $y$.
- Définissons $V : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ par $V(y) = -\sum_{k=1}^{n} \left( b\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{\bar{b}}{n} \right) y_{(k)}$.
- Alors
$$\boxed{\mathrm{d}Y(t) = -\nabla V(Y(t))\mathrm{d}t + \sigma \bar{B}(t),}$$
de sorte que la mesure de probabilité sur $\mathcal{M}_n$ de densité
$$p_\infty^n(y) = \frac{1}{Z} \exp\left( -\frac{2}{\sigma^2} V(y) \right) = \frac{1}{Z} \exp\left( \frac{2}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} b\left(\frac{k}{n}\right) y_{(k)} \right)$$
est l'**unique mesure invariante** de $Y$.
- Pal, Pitman '08 : convergence en **variation totale**.

# Vitesse de convergence à l'équilibre

## Inégalité de Poincaré (Jourdain, Malrieu '08)

Si $b$ est **strictement décroissante**, alors la mesure de densité $p_\infty^n$ vérifie une **inégalité de Poincaré**, c'est-à-dire

$$\forall f : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Var}_{p_\infty^n}(f) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda} \int_{y \in \mathcal{M}_n} |\Pi \nabla f|^2 p_\infty^n(y) \mathrm{d}y,$$

où $\Pi$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{M}_n$ et $\lambda$ est **uniforme en $n$**.

## Convergence exponentielle à l'équilibre

Soit $p_t^n$ la densité de $(Y_{1,n}(t), \ldots, Y_{n,n}(t))$ sur $\mathcal{M}_n$. Alors

$$\chi^2(p_t^n | p_\infty^n) \leq \exp(-\lambda t) \chi^2(p_0^n | p_\infty^n),$$

où

$$\chi^2(p|q) := \int_{y \in \mathcal{M}_n} \left( \frac{p(y)}{q(y)} - 1 \right)^2 q(y) \mathrm{d}y.$$

# Vers le processus non-linéaire

Notons $p_t^{1,n}$ la première marginale de $p_t^n$, *i.e.* **la loi de** $Y_{1,n}(t)$.

- **Propagation du chaos** : $p_t^{1,n} \to P_t$ loi du processus non-linéaire.
- **Convergence à l'équilibre** : $\chi^2(p_t^n|p_\infty^n) \leq \exp(-\lambda t)\chi^2(p_0^n|p_\infty^n)$.

**Problème : mauvais scaling** de $\chi^2(p_t^n|p_\infty^n)$ en $n$ ; **ne permet pas** de déduire estimation du type

$$d(p_t^{1,n}, p_\infty^{1,n}) \leq \exp(-\lambda t) d(p_0^{1,n}, p_\infty^{1,n})$$

uniforme en $n$, pour une certaine distance $d$.

➯ On **ne peut pas** utiliser directement le système de particules pour obtenir convergence à l'équilibre du processus non-linéaire.

# Plan

Interprétation probabiliste

Comportement en temps long du système de particules

**Comportement en temps long du processus non-linéaire**

# Version continue du recentrage

**Rappel :** le processus non-linéaire s'écrit

$$X(t) = X(0) + \int_{s=0}^{t} b(F_s(X(s)))\mathrm{d}s + \sigma B(t),$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}[X(0)] + \int_{s=0}^{t} \mathbb{E}[b(F_s(X(s)))]\mathrm{d}s \\ &= \mathbb{E}[X(0)] + t\bar{b}, \qquad \bar{b} := \int_{u=0}^{1} b(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

➩ Condition **nécessaire** pour espérer convergence à l'équilibre :

$$\boxed{\bar{b} = 0.}$$

# Mesures invariantes

L'équation stationnaire pour $F_t$ s'écrit

$$0 = \frac{\sigma^2}{2} F_\infty'' - (B(F_\infty))',$$

qui est une **EDO à variables séparables** sur $\mathbb{R}$.

## Ensemble des solutions stationnaires

L'ensemble des solutions stationnaires est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent $F_\infty(x) = \Psi^{-1}(x+c)$, où

$$\Psi(u) := \int_{v=1/2}^{u} \frac{\sigma^2}{2B(v)} \mathrm{d}v.$$

Condition nécessaire pour bonne définition de $\Psi$ :

$$\forall u \in ]0,1[, \qquad B(u) = \int_{v=0}^{u} b(v)\mathrm{d}v > 0.$$

Comme $\bar{b} = B(1) = 0$, en particulier vrai si $b$ est **strictement décroissante**.

# Convergence à l'équilibre

Distance de **Wasserstein** : si $F$, $G$ fonctions de répartition,

$$\forall p \geq 1, \quad W_p^p(F,G) := \inf_{X \sim F, Y \sim G} \mathbb{E}\left[|X-Y|^p\right] = \int_{u=0}^{1} |F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u$$

## Convergence à l'équilibre (Jourdain, R. '13)

Si $\bar{b} = 0$, $b$ est **strictement décroissante**, et $W_{2+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$ où $F_\infty$ est choisi avec la **même espérance** que $F_0$, alors

$$\lim_{t \to +\infty} W_2(F_t, F_\infty) = 0.$$

Preuve en deux étapes :

- on montre que $t \mapsto W_2(F_t, G_t)$ **décroissante** : argument **probabiliste** ;
- on utilise ensuite **expression analytique** de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, F_\infty)$.

# Contraction de la distance de Wasserstein I

Si $(X_{1,n}^F, \dots, X_{n,n}^F)$ et $(X_{1,n}^G, \dots, X_{n,n}^G)$ systèmes de particules tels que

$$\mu_t^{n,F} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_{i,n}^F(t)} \to F_t, \qquad \mu_t^{n,G} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_{i,n}^G(t)} \to G_t,$$

alors $W_2(F_t, G_t) = \lim_{n \to +\infty} W_2(\mu_t^{n,F}, \mu_t^{n,G})$.

➩ Il suffit de montrer $t \mapsto W_2(\mu_t^{n,F}, \mu_t^{n,G})$ **décroît p.s.**.

**Couplage optimal :**

$$W_2^2(\mu_t^{n,F}, \mu_t^{n,G}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |X_{(k),n}^F(t) - X_{(k),n}^G(t)|^2,$$

où $X_{(1),n}^{\cdot}(t) \leq \cdots \leq X_{(n),n}^{\cdot}(t)$ **statistique d'ordre** du système.

# Contraction de la distance de Wasserstein II

Le **processus réordonné** s'écrit

$$\mathrm{d}X_{(k),n}(t) = b(k/n)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_k(t) + \mathrm{d}\kappa_k(t).$$

➯ Mouvement brownien **normalement réfléchi** aux bords du convexe

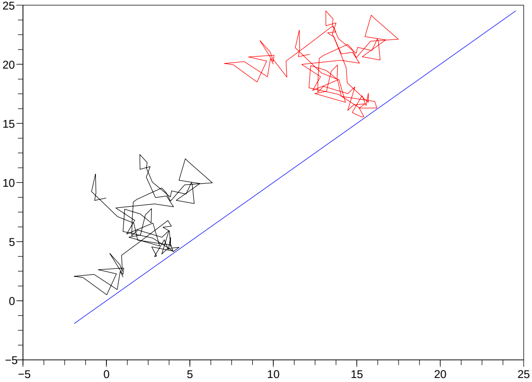
$$D_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \leq \cdots \leq x_n\},$$

avec **dérive constante** $(b(1/n), \ldots, b(n/n))$.

**Tanaka : existence et unicité fortes** pour EDS réfléchie.

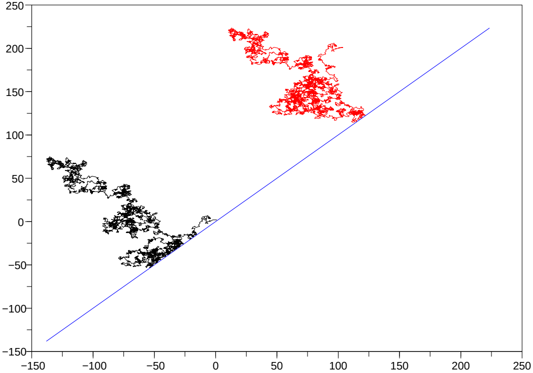
# Contraction de la distance de Wasserstein III

Couplage de browniens réfléchis dirigés par le **même** brownien « libre » $W$ :



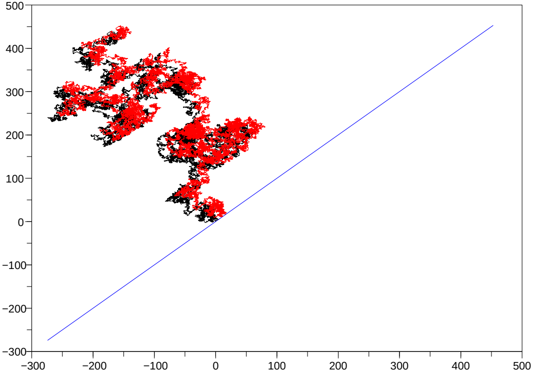
# Contraction de la distance de Wasserstein III

Couplage de browniens réfléchis dirigés par le **même** brownien « libre » $W$ :



# Contraction de la distance de Wasserstein III

Couplage de browniens réfléchis dirigés par le **même** brownien « libre » $W$ :




➭ donne **décroissance de la distance euclidienne**.

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ I

**Remarque importante :** on peut écrire une équation fermée sur $F_t^{-1}$ :

$$\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_u \left( \frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)} \right),$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, G_t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{u=0}^{1} (F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))^2 \mathrm{d}u$$

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ I

**Remarque importante :** on peut écrire une équation fermée sur $F_t^{-1}$ :

$$\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_u\left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_2^2(F_t, G_t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{u=0}^{1}(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))^2\mathrm{d}u \\ &= 2\int_{u=0}^{1}(\partial_t F_t^{-1}(u) - \partial_t G_t^{-1}(u))(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))\mathrm{d}u\end{aligned}$$

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ I

**Remarque importante :** on peut écrire une équation fermée sur $F_t^{-1}$ :

$$\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_u \left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, G_t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{u=0}^{1} (F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))^2 \mathrm{d}u \\ &= 2\int_{u=0}^{1} (\partial_t F_t^{-1}(u) - \partial_t G_t^{-1}(u))(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))\mathrm{d}u\end{aligned}$$

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ I

**Remarque importante :** on peut écrire une équation fermée sur $F_t^{-1}$ :

$$\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_u \left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, G_t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{u=0}^{1} (F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))^2 \mathrm{d}u \\ &= 2\int_{u=0}^{1} (\partial_t F_t^{-1}(u) - \partial_t G_t^{-1}(u))(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))\mathrm{d}u \\ &= -\sigma^2 \int_{u=0}^{1} \partial_u \left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)} - \frac{1}{\partial_u G_t^{-1}(u)}\right)(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))\mathrm{d}u\end{aligned}$$

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ I

**Remarque importante :** on peut écrire une équation fermée sur $F_t^{-1}$ :

$$\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_u \left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, G_t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{u=0}^{1} (F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))^2 \mathrm{d}u \\
&= 2\int_{u=0}^{1} (\partial_t F_t^{-1}(u) - \partial_t G_t^{-1}(u))(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))\mathrm{d}u \\
&= -\sigma^2 \int_{u=0}^{1} \partial_u \left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)} - \frac{1}{\partial_u G_t^{-1}(u)}\right)(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))\mathrm{d}u \\
&= \sigma^2 \int_{u=0}^{1} \left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)} - \frac{1}{\partial_u G_t^{-1}(u)}\right)(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u G_t^{-1}(u))\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ I

**Remarque importante :** on peut écrire une équation fermée sur $F_t^{-1}$ :

$$\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_u \left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, G_t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{u=0}^{1} (F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))^2 \mathrm{d}u \\
&= 2 \int_{u=0}^{1} (\partial_t F_t^{-1}(u) - \partial_t G_t^{-1}(u))(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))\mathrm{d}u \\
&= -\sigma^2 \int_{u=0}^{1} \partial_u \left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)} - \frac{1}{\partial_u G_t^{-1}(u)}\right)(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u))\mathrm{d}u \\
&= \sigma^2 \int_{u=0}^{1} \left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)} - \frac{1}{\partial_u G_t^{-1}(u)}\right)(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u G_t^{-1}(u))\mathrm{d}u \\
&= -\sigma^2 \int_{u=0}^{1} \frac{(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u G_t^{-1}(u))^2}{\partial_u F_t^{-1}(u)\partial_u G_t^{-1}(u)}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ II

Prenons $G_t = F_\infty$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, F_\infty) = -\sigma^2 \int_{u=0}^{1} \frac{(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u))^2}{\partial_u F_t^{-1}(u)\partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u$$

Dérivée d'une fonction **décroissante** et **positive** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_{t_n}, F_\infty) = 0.$

On écrit maintenant, pour tout $u \in ]0, 1[$,

$$|F_{t_n}^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)| \leq \int_{u=0}^{1} |\partial_u F_{t_n}^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)| \mathrm{d}u \qquad \text{(petite arnaque)}$$

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ II

Prenons $G_t = F_\infty$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, F_\infty) = -\sigma^2 \int_{u=0}^{1} \frac{(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u))^2}{\partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u$$

Dérivée d'une fonction **décroissante** et **positive** : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_{t_n}, F_\infty) = 0$.
On écrit maintenant, pour tout $u \in ]0,1[$,

$$|F_{t_n}^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)| \leq \int_{u=0}^{1} |\partial_u F_{t_n}^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)| \mathrm{d}u \qquad \text{(petite arnaque)}$$

$$\leq \sqrt{\int_{u=0}^{1} \frac{(\partial_u F_{t_n}^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u))^2}{\partial_u F_{t_n}^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u \int_{u=0}^{1} \partial_u F_{t_n}^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u) \mathrm{d}u}$$

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ II

Prenons $G_t = F_\infty$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, F_\infty) = -\sigma^2 \int_{u=0}^1 \frac{(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u))^2}{\partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u$$

Dérivée d'une fonction **décroissante** et **positive** : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_{t_n}, F_\infty) = 0$.
On écrit maintenant, pour tout $u \in ]0,1[$,

$$|F_{t_n}^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)| \leq \int_{u=0}^1 |\partial_u F_{t_n}^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)| \mathrm{d}u \qquad \text{(petite arnaque)}$$

$$\leq \sqrt{\int_{u=0}^1 \frac{(\partial_u F_{t_n}^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u))^2}{\partial_u F_{t_n}^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u \int_{u=0}^1 \partial_u F_{t_n}^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u) \mathrm{d}u}$$

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ II

Prenons $G_t = F_\infty$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, F_\infty) = -\sigma^2 \int_{u=0}^{1} \frac{(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u))^2}{\partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u$$

Dérivée d'une fonction **décroissante** et **positive** : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_{t_n}, F_\infty) = 0.$
On écrit maintenant, pour tout $u \in ]0, 1[$,

$$|F_{t_n}^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)| \leq \int_{u=0}^{1} |\partial_u F_{t_n}^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)| \mathrm{d}u \qquad \text{(petite arnaque)}$$

$$\leq \sqrt{\int_{u=0}^{1} \frac{(\partial_u F_{t_n}^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u))^2}{\partial_u F_{t_n}^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u \int_{u=0}^{1} \partial_u F_{t_n}^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u) \mathrm{d}u}$$

$\to 0$.

# Analyse de la dissipation de $W(F_t, G_t)$ III

Conclusion de la preuve :

- On a, pour tout $u \in ]0,1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} |F_{t_n}^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)| = 0.$$

- **Uniforme intégrabilité** vient de

$$\int_{u=0}^{1} |F_{t_n}^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|^{2+\epsilon} \mathrm{d}u = W_{2+\epsilon}^{2+\epsilon}(F_{t_n}, F_\infty) \leq W_{2+\epsilon}^{2+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty.$$

- On déduit

$$\lim_{n\to+\infty} W_2(F_{t_n}, F_\infty) = \lim_{n\to+\infty} \int_{u=0}^{1} |F_{t_n}^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|^2 \mathrm{d}u = 0,$$

et on conclut par monotonie.

# Conclusion

Résultats de **convergence à l'équilibre** :

- **Système de particules** : décroissance **exponentielle à taux uniforme**, mais **mauvais scaling**.
- **Processus non-linéaire** : **pas de vitesse de convergence**.

➩ Question encore ouverte : comment marier ces deux résultats ?

**Merci de votre attention !**