Grandes déviations des traces de matrices aléatoires

Fanny Augeri

Mardi 19 Avril 2016

JPS, Ecole de Physique des Houches

INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

Traces et nombres de Catalan

Soient $(X_{i,i})_{i\geq 1}$ et $(X_{i,j})_{1<i<j}$ deux familles de v.a i.i.d. On définit $X \in H_n(\mathbb{C})$, matrice de Wigner,

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & & X_{1,n} \\ \overline{X_{1,2}} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & X_{n-1,n} \\ \overline{X_{n,1}} & \cdots & & \overline{X_{n-1,n}} & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

▷ Si $\mathbb{E}X_{1,1} = \mathbb{E}X_{1,2} = 0$, $\mathbb{E}X_{1,2}^2 = 1$,

$$p.s \quad \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} C_{p/2} & \text{p pair,} \\ 0 & \text{p impair,} \end{cases}$$

avec $C_{p/2}$ le $(p/2)^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

Traces et nombres de Catalan

Soient $(X_{i,i})_{i\geq 1}$ et $(X_{i,j})_{1<i<j}$ deux familles de v.a i.i.d. On définit $X \in H_n(\mathbb{C})$, matrice de Wigner,

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \overline{X_{1,2}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X_{n-1,n} \\ \overline{X_{n,1}} & \cdots & \overline{X_{n-1,n}} & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

▷ Si $\mathbb{E}X_{1,1} = \mathbb{E}X_{1,2} = 0$, $\mathbb{E}X_{1,2}^2 = 1$,

$$p.s \quad \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} C_{p/2} & \text{p pair,} \\ 0 & \text{p impair,} \end{cases}$$

avec $C_{p/2}$ le $(p/2)^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

Traces et nombres de Catalan

Soient $(X_{i,i})_{i\geq 1}$ et $(X_{i,j})_{1<i<j}$ deux familles de v.a i.i.d. On définit $X \in H_n(\mathbb{C})$, matrice de Wigner,

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \overline{X_{1,2}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X_{n-1,n} \\ \overline{X_{n,1}} & \cdots & \overline{X_{n-1,n}} & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

$\triangleright$ Si $\mathbb{E}X_{1,1} = \mathbb{E}X_{1,2} = 0$, $\mathbb{E}X_{1,2}^2 = 1$,

$$p.s \quad \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} C_{p/2} & \text{p pair,} \\ 0 & \text{p impair,} \end{cases}$$

avec $C_{p/2}$ le $(p/2)^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

Traces et nombres de Catalan

Soient $(X_{i,i})_{i\geq 1}$ et $(X_{i,j})_{1<i<j}$ deux familles de v.a i.i.d. On définit $X \in H_n(\mathbb{C})$, matrice de Wigner,

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \overline{X_{1,2}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X_{n-1,n} \\ \overline{X_{n,1}} & \cdots & \overline{X_{n-1,n}} & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

▷ Si $\mathbb{E}X_{1,1} = \mathbb{E}X_{1,2} = 0$, $\mathbb{E}X_{1,2}^2 = 1$,

$$p.s \quad \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} C_{p/2} & \text{p pair,} \\ 0 & \text{p impair,} \end{cases}$$

avec $C_{p/2}$ le $(p/2)^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

Traces et nombres de Catalan

Soient $(X_{i,i})_{i\geq 1}$ et $(X_{i,j})_{1<i<j}$ deux familles de v.a i.i.d. On définit $X \in H_n(\mathbb{C})$, matrice de Wigner,

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \overline{X_{1,2}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X_{n-1,n} \\ \overline{X_{n,1}} & \cdots & \overline{X_{n-1,n}} & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

$\triangleright$ Si $\mathbb{E}X_{1,1} = \mathbb{E}X_{1,2} = 0$, $\mathbb{E}X_{1,2}^2 = 1$,

$$p.s \quad \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} C_{p/2} & \text{p pair,} \\ 0 & \text{p impair,} \end{cases}$$

avec $C_{p/2}$ le $(p/2)^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

Méthode des moments

▷ Il existe une unique mesure de probabilité, σ_{sc}, appelée loi du semi-cercle, telle que

$$\sigma_{sc}(x^{2k}) = C_k,\ \sigma_{sc}(x^{2k+1}) = 0.$$

▷ Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de X matrice de Wigner. On définit la mesure spectrale empirique par : $\mu_{X/\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i/\sqrt{n}}$.

$$\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p.$$

▷ Si $\mathbb{E}|X_{1,2} - \mathbb{E}X_{1,2}|^2 = 1$,

$$p.s \quad \mu_{X/\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} \sigma_{sc}.$$

Méthode des moments

▷ Il existe une unique mesure de probabilité, σ_{sc}, appelée loi du semi-cercle, telle que

$$\sigma_{sc}(x^{2k}) = C_k,\ \sigma_{sc}(x^{2k+1}) = 0.$$

▷ Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de X matrice de Wigner. On définit la mesure spectrale empirique par : $\mu_{X/\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i/\sqrt{n}}$.

$$\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p.$$

▷ Si $\mathbb{E}|X_{1,2} - \mathbb{E}X_{1,2}|^2 = 1$,

$$p.s \quad \mu_{X/\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} \sigma_{sc}.$$

Méthode des moments

▷ Il existe une unique mesure de probabilité, σ_{sc}, appelée loi du semi-cercle, telle que

$$\sigma_{sc}(x^{2k}) = C_k, \ \sigma_{sc}(x^{2k+1}) = 0.$$

▷ Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de X matrice de Wigner. On définit la mesure spectrale empirique par : $\mu_{X/\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i/\sqrt{n}}$.

$$\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p.$$

▷ Si $\mathbb{E}|X_{1,2} - \mathbb{E}X_{1,2}|^2 = 1$,

$$p.s \quad \mu_{X/\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} \sigma_{sc}.$$

Méthode des moments

▷ Il existe une unique mesure de probabilité, σ_{sc}, appelée loi du semi-cercle, telle que

$$\sigma_{sc}(x^{2k}) = C_k, \ \sigma_{sc}(x^{2k+1}) = 0.$$

▷ Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de X matrice de Wigner. On définit la mesure spectrale empirique par : $\mu_{X/\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{\lambda_i/\sqrt{n}}$.

$$\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p.$$

▷ Si $\mathbb{E}|X_{1,2} - \mathbb{E}X_{1,2}|^2 = 1$,

$$p.s \quad \mu_{X/\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} \sigma_{sc}.$$

Rigidité des valeurs propres

Théorème (Anderson-Guionnet-Zeitouni)

$$n(\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p) - \mathbb{E}\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p)) \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, \sigma_p),$$

où σ_p dépend de $\mathbb{E}X_{1,1}^2$ et $\mathbb{E}X_{1,2}^4$.

Théorème (Guionnet-Zeitouni)

Soit X une matrice Hermitienne, $(X_{i,j})_{i\leq j}$ indépendantes bornées ou satisfaisant une inégalité de Log-Sobolev. Pour toute fonction f 1-Lipchitz (convexe),

$$\mathbb{P}\left(|\mu_{X/\sqrt{n}}(f) - \mathbb{E}\mu_{X/\sqrt{n}}(f)| > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2n^2}{\kappa^2}\right).$$

Rigidité des valeurs propres

Théorème (Anderson-Guionnet-Zeitouni)

$$n(\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p) - \mathbb{E}\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p)) \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,\sigma_p),$$

où σ_p dépend de $\mathbb{E}X_{1,1}^2$ et $\mathbb{E}X_{1,2}^4$.

Théorème (Guionnet-Zeitouni)

Soit X une matrice Hermitienne, $(X_{i,j})_{i\leq j}$ indépendantes bornées ou satisfaisant une inégalité de Log-Sobolev. Pour toute fonction f 1-Lipchitz (convexe),

$$\mathbb{P}\left(|\mu_{X/\sqrt{n}}(f) - \mathbb{E}\mu_{X/\sqrt{n}}(f)| > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2n^2}{\kappa^2}\right).$$

Rigidité des valeurs propres

Théorème (Anderson-Guionnet-Zeitouni)

$$n(\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p) - \mathbb{E}\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p)) \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, \sigma_p),$$

où σ_p *dépend de* $\mathbb{E}X_{1,1}^2$ *et* $\mathbb{E}X_{1,2}^4$.

Théorème (Guionnet-Zeitouni)

Soit X *une matrice Hermitienne,* $(X_{i,j})_{i\leq j}$ *indépendantes bornées ou satisfaisant une inégalité de Log-Sobolev. Pour toute fonction* f 1-*Lipchitz (convexe),*

$$\mathbb{P}\left(|\mu_{X/\sqrt{n}}(f) - \mathbb{E}\mu_{X/\sqrt{n}}(f)| > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2n^2}{\kappa^2}\right).$$

Grandes déviations des traces?

- **Problème :** $\mu \mapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
  - On ne peut pas contracter les PGD connus pour la mesure spectrale.

▷ **Question :** Quelle vitesse de déviations?

- Meckes-Szarek : X à entrées bornées ou satisfaisant LSI,

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{tr}X^p - \mathbb{E}\mathrm{tr}X^p| > tn^{1+p/2}\right) \leq c\exp(c' t^{2/p} n^{1+2/p}).$$

▷ Vitesse des déviations de $\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p)$: $\geq n^{1+2/p}$.

Grandes déviations des traces?

- **Problème :** $\mu \mapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
  - On ne peut pas contracter les PGD connus pour la mesure spectrale.

▷ **Question :** Quelle vitesse de déviations?

- Meckes-Szarek : X à entrées bornées ou satisfaisant LSI,

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{tr}X^p - \mathbb{E}\mathrm{tr}X^p| > tn^{1+p/2}\right) \leq c\exp(c' t^{2/p} n^{1+2/p}).$$

▷ Vitesse des déviations de $\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p)$: $\geq n^{1+2/p}$.

Grandes déviations des traces?

- **Problème :** $\mu \mapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
  - On ne peut pas contracter les PGD connus pour la mesure spectrale.

▷ **Question :** Quelle vitesse de déviations?

- Meckes-Szarek : X à entrées bornées ou satisfaisant LSI,

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{tr}X^p - \mathbb{E}\mathrm{tr}X^p| > tn^{1+p/2}\right) \leq c\exp(c' t^{2/p} n^{1+2/p}).$$

▷ Vitesse des déviations de $\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p)$: $\geq n^{1+2/p}$.

Grandes déviations des traces?

- **Problème :** $\mu \mapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
  - On ne peut pas contracter les PGD connus pour la mesure spectrale.

▷ **Question :** Quelle vitesse de déviations?

- Meckes-Szarek : X à entrées bornées ou satisfaisant LSI,

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{tr}X^p - \mathbb{E}\mathrm{tr}X^p| > tn^{1+p/2}\right) \leq c\exp(c't^{2/p}n^{1+2/p}).$$

▷ Vitesse des déviations de $\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p)$: $\geq n^{1+2/p}$.

Grandes déviations des traces?

- **Problème :** $\mu \mapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
  - On ne peut pas contracter les PGD connus pour la mesure spectrale.

▷ **Question :** Quelle vitesse de déviations?

- Meckes-Szarek : X à entrées bornées ou satisfaisant LSI,

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{tr}X^p - \mathbb{E}\mathrm{tr}X^p| > tn^{1+p/2}\right) \leq c\exp(c' t^{2/p} n^{1+2/p}).$$

▷ Vitesse des déviations de $\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p)$: $\geq n^{1+2/p}$.

Grandes déviations des traces?

- **Problème :** $\mu \mapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
  - On ne peut pas contracter les PGD connus pour la mesure spectrale.

▷ **Question :** Quelle vitesse de déviations?

- Meckes-Szarek : X à entrées bornées ou satisfaisant LSI,

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{tr}X^p - \mathbb{E}\mathrm{tr}X^p| > tn^{1+p/2}\right) \leq c\exp(c' t^{2/p} n^{1+2/p}).$$

▷ Vitesse des déviations de $\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p)$: $\geq n^{1+2/p}$.

Grandes déviations des traces?

▷ Cas X à entrées non centrées : $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$.

- Chatterjee-Varadhan : $G(n,p)$ suit un PGD à vitesse N^2 pour la cut métrique $\delta_\square$.

$$W \mapsto \int_{[0,1]^p} \prod_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} W(x_i, x_{i+1}) dx_i$$

  est continue pour $\delta_\square$.

- Par principe de contraction : $\left(\frac{1}{n^p} \mathrm{tr} X^p\right)_{n \geq 1}$ suit un PGD à vitesse n^2.

Grandes déviations des traces?

▷ Cas X à entrées non centrées : $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$.

- Chatterjee-Varadhan : $G(n,p)$ suit un PGD à vitesse N^2 pour la cut métrique $\delta_\square$.

$$W \mapsto \int_{[0,1]^p} \prod_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} W(x_i, x_{i+1}) dx_i$$

est continue pour $\delta_\square$.

- Par principe de contraction : $\left(\frac{1}{n^p} \mathrm{tr} X^p\right)_{n \geq 1}$ suit un PGD à vitesse n^2.

Grandes déviations des traces?

▷ Cas X à entrées non centrées : $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$.

- Chatterjee-Varadhan : $G(n,p)$ suit un PGD à vitesse N^2 pour la cut métrique $\delta_\square$.

$$W \mapsto \int_{[0,1]^p} \prod_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} W(x_i, x_{i+1}) dx_i$$

est continue pour $\delta_\square$.

- Par principe de contraction : $\left(\frac{1}{n^p} \mathrm{tr} X^p\right)_{n \geq 1}$ suit un PGD à vitesse n^2.

Grandes déviations des traces?

▷ Cas X à entrées non centrées : $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$.

- Chatterjee-Varadhan : $G(n,p)$ suit un PGD à vitesse N^2 pour la cut métrique $\delta_\square$.

$$W \mapsto \int_{[0,1]^p} \prod_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} W(x_i, x_{i+1}) dx_i$$

  est continue pour $\delta_\square$.

- Par principe de contraction : $(\frac{1}{n^p} \mathrm{tr} X^p)_{n \geq 1}$ suit un PGD à vitesse n^2.

Grandes déviations des traces?

▷ Cas de modèle multi-matriciel :

$$\mu_V^N(dA) = \frac{1}{Z_V^N} e^{-N\mathrm{tr}V(A_1,\dots A_N))} \mu_{GUE}^N(dA).$$

où $\mu_{GUE}^N(dA) \propto e^{-\frac{N}{2}\sum_{i=1}^N \mathrm{tr}A_i^2} dA_1 \dots dA_N$, et

$$V = \sum_{i=1}^n t_i q_i(A_1, \dots, A_n).$$

- Eichelsbacher-Sommerauer : Pour $0 < \gamma < 1$: déviations à vitesse $N^{2\gamma}$ de

$$\frac{1}{N^\gamma}(\mathrm{tr} q_l(A_1, \dots A_N) - \mathbb{E}\mathrm{tr} q_l(A_1, \dots A_N)).$$

Grandes déviations des traces?

▷ Cas de modèle multi-matriciel :

$$\mu_V^N(dA) = \frac{1}{Z_V^N} e^{-N \mathrm{tr} V(A_1,\ldots A_N))} \mu_{GUE}^N(dA).$$

où $\mu_{GUE}^N(dA) \propto e^{-\frac{N}{2}\sum_{i=1}^N \mathrm{tr} A_i^2} dA_1 \ldots dA_N$, et

$$V = \sum_{i=1}^n t_i q_i(A_1, \ldots, A_n).$$

- Eichelsbacher-Sommerauer : Pour $0 < \gamma < 1$: déviations à vitesse $N^{2\gamma}$ de

$$\frac{1}{N^\gamma}(\mathrm{tr} q_l(A_1,\ldots A_N) - \mathbb{E}\mathrm{tr} q_l(A_1,\ldots A_N)).$$

Grandes déviations des traces?

$\triangleright$ Cas de modèle multi-matriciel :

$$\mu_V^N(dA) = \frac{1}{Z_V^N} e^{-N\mathrm{tr}V(A_1,\ldots A_N))} \mu_{GUE}^N(dA).$$

où $\mu_{GUE}^N(dA) \propto e^{-\frac{N}{2}\sum_{i=1}^N \mathrm{tr}A_i^2} dA_1 \ldots dA_N$, et

$$V = \sum_{i=1}^n t_i q_i(A_1, \ldots, A_n).$$

- Eichelsbacher-Sommerauer : Pour $0 < \gamma < 1$: déviations à vitesse $N^{2\gamma}$ de

$$\frac{1}{N^\gamma}(\mathrm{tr}q_l(A_1, \ldots A_N) - \mathbb{E}\mathrm{tr}q_l(A_1, \ldots A_N)).$$

Cas Gaussien

Hypothèses

Soit X une matrice de Wigner à entrées Gaussiennes : $X_{1,1}$ et $X_{1,2}$ sont centrées de variance σ^2 et 1 respectivement.

Résultat : Pour $p \geq 3$, $\left(\mathrm{tr}_N\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)^p\right)_{N\in\mathbb{N}}$ satisfait un PGD à vitesse $N^{1+\frac{2}{p}}$, de fonction de taux J_p. Si p est pair,

$$J_p(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\beta}{2}\right)\left(s - C_{p/2}\right)^{\frac{2}{p}} & \text{si } s \geq C_{p/2}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si p est impair

$$\forall s \in \mathbb{R},\ J_p(s) = \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\beta}{2}\right)|s|^{\frac{2}{p}},$$

où $\beta = 1$, si $X_{1,2}$ est réel, et $\beta = 2$ si $X_{1,2}$ est complexe.

Cas Gaussien

Hypothèses

Soit X une matrice de Wigner à entrées Gaussiennes : $X_{1,1}$ et $X_{1,2}$ sont centrées de variance σ^2 et 1 respectivement.

Résultat : Pour $p \geq 3$, $\left(\mathrm{tr}_N\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)^p\right)_{N\in\mathbb{N}}$ satisfait un PGD à vitesse $N^{1+\frac{2}{p}}$, de fonction de taux J_p. Si p est pair,

$$J_p(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\beta}{2}\right)\left(s - C_{p/2}\right)^{\frac{2}{p}} & \text{si } s \geq C_{p/2}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si p est impair

$$\forall s \in \mathbb{R},\ J_p(s) = \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\beta}{2}\right)|s|^{\frac{2}{p}},$$

où $\beta = 1$, si $X_{1,2}$ est réel, et $\beta = 2$ si $X_{1,2}$ est complexe.

Cas Gaussien

Hypothèses

Soit X une matrice de Wigner à entrées Gaussiennes : $X_{1,1}$ et $X_{1,2}$ sont centrées de variance σ^2 et 1 respectivement.

Résultat : Pour $p \geq 3$, $\left(\mathrm{tr}_N \left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)^p\right)_{N\in\mathbb{N}}$ satisfait un PGD à vitesse $N^{1+\frac{2}{p}}$, de fonction de taux J_p. Si p est pair,

$$J_p(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\beta}{2}\right)\left(s - C_{p/2}\right)^{\frac{2}{p}} & \text{si } s \geq C_{p/2}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si p est impair

$$\forall s \in \mathbb{R},\ J_p(s) = \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\beta}{2}\right)|s|^{\frac{2}{p}},$$

où $\beta = 1$, si $X_{1,2}$ est réel, et $\beta = 2$ si $X_{1,2}$ est complexe.

Cas Gaussien

Hypothèses

Soit X une matrice de Wigner à entrées Gaussiennes : $X_{1,1}$ et $X_{1,2}$ sont centrées de variance σ^2 et 1 respectivement.

Résultat : Pour $p \geq 3$, $\left(\mathrm{tr}_N \left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)^p\right)_{N\in\mathbb{N}}$ satisfait un PGD à vitesse $N^{1+\frac{2}{p}}$, de fonction de taux J_p. Si p est pair,

$$J_p(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\beta}{2}\right)\left(s - C_{p/2}\right)^{\frac{2}{p}} & \text{si } s \geq C_{p/2}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si p est impair

$$\forall s \in \mathbb{R},\ J_p(s) = \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\beta}{2}\right)|s|^{\frac{2}{p}},$$

où $\beta = 1$, si $X_{1,2}$ est réel, et $\beta = 2$ si $X_{1,2}$ est complexe.

Cas Gaussien

Hypothèses

Soit X une matrice de Wigner à entrées Gaussiennes : $X_{1,1}$ et $X_{1,2}$ sont centrées de variance σ^2 et 1 respectivement.

Résultat : Pour $p \geq 3$, $\left(\mathrm{tr}_N\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)^p\right)_{N\in\mathbb{N}}$ satisfait un PGD à vitesse $N^{1+\frac{2}{p}}$, de fonction de taux J_p. Si p est pair,

$$J_p(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\beta}{2}\right)\left(s - C_{p/2}\right)^{\frac{2}{p}} & \text{si } s \geq C_{p/2}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si p est impair

$$\forall s \in \mathbb{R},\ J_p(s) = \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\beta}{2}\right)|s|^{\frac{2}{p}},$$

où $\beta = 1$, si $X_{1,2}$ est réel, et $\beta = 2$ si $X_{1,2}$ est complexe.

▷ Remarque sur la fonction de taux : Si $p \in 2\mathbb{Z}$, alors $J_p(s) = +\infty$ sur $(-\infty, C_{p/2})$.

- Pour $\varepsilon > 0$,

$$F = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \mu(x^p) \leq C_{p/2} - \varepsilon\}$$

  est un fermé.

- Si X est du GUE ou GOE, $\mu_{X/\sqrt{N}}$ suit un PGD à vitesse N^2, qui donne

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\mathrm{tr}(X/\sqrt{N})^p \leq C_{p/2} - \varepsilon\right) \sim e^{-cN^2},$$

  avec $c > 0$.

$\triangleright$ Remarque sur la fonction de taux : Si $p \in 2\mathbb{Z}$, alors $J_p(s) = +\infty$ sur $(-\infty, C_{p/2})$.

- Pour $\varepsilon > 0$,

$$F = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \mu(x^p) \leq C_{p/2} - \varepsilon\}$$

  est un fermé.

- Si X est du GUE ou GOE, $\mu_{X/\sqrt{N}}$ suit un PGD à vitesse N^2, qui donne

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\mathrm{tr}(X/\sqrt{N})^p \leq C_{p/2} - \varepsilon\right) \sim e^{-cN^2},$$

  avec $c > 0$.

▷ Remarque sur la fonction de taux : Si $p \in 2\mathbb{Z}$, alors $J_p(s) = +\infty$ sur $(-\infty, C_{p/2})$.

- Pour $\varepsilon > 0$,

$$F = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \mu(x^p) \leq C_{p/2} - \varepsilon\}$$

  est un fermé.

- Si X est du GUE ou GOE, $\mu_{X/\sqrt{N}}$ suit un PGD à vitesse N^2, qui donne

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\mathrm{tr}(X/\sqrt{N})^p \leq C_{p/2} - \varepsilon\right) \sim e^{-cN^2},$$

  avec $c > 0$.

▷ Remarque sur la fonction de taux : Si $p \in 2\mathbb{Z}$, alors $J_p(s) = +\infty$ sur $(-\infty, C_{p/2})$.

- Pour $\varepsilon > 0$,

$$F = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \mu(x^p) \leq C_{p/2} - \varepsilon\}$$

  est un fermé.

- Si X est du GUE ou GOE, $\mu_{X/\sqrt{N}}$ suit un PGD à vitesse N^2, qui donne

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\mathrm{tr}(X/\sqrt{N})^p \leq C_{p/2} - \varepsilon\right) \sim e^{-cN^2},$$

  avec $c > 0$.

$\triangleright$ Remarque sur la fonction de taux : Si $p \in 2\mathbb{Z}$, alors $J_p(s) = +\infty$ sur $(-\infty, C_{p/2})$.

- Pour $\varepsilon > 0$,

$$F = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \mu(x^p) \leq C_{p/2} - \varepsilon\}$$

  est un fermé.

- Si X est du GUE ou GOE, $\mu_{X/\sqrt{N}}$ suit un PGD à vitesse N^2, qui donne

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\mathrm{tr}(X/\sqrt{N})^p \leq C_{p/2} - \varepsilon\right) \sim e^{-cN^2},$$

  avec $c > 0$.

▷ Si X est une matrice du GUE, i.e $X \sim e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}H^2}dH$,

- la loi jointe des valeurs propres est

$$d\mathbb{P}_N = \frac{1}{Z_N} \underbrace{\prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2}_{\text{interaction}} \underbrace{e^{-\frac{N}{2}\sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \prod_{i=1}^N d\lambda_i}_{\mathcal{N}(0,\frac{1}{N}I_N)} .$$

- J_p devient (p impair): $J_p(s) = \frac{1}{2}|s|^{2/p}$, même fonction de taux que celle des grandes déviations de

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i^p ,$$

avec $Y_1, ..., Y_N$ i.i.d $\mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$.

▷ Interaction logarithmique négligeable dans les déviations de $\mu_{X/\sqrt{N}}(x^p)$.

▷ Si X est une matrice du GUE, i.e $X \sim e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}H^2} dH$,

- la loi jointe des valeurs propres est

$$d\mathbb{P}_N = \frac{1}{Z_N} \underbrace{\prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2}_{\text{interaction}} \underbrace{e^{-\frac{N}{2}\sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \prod_{i=1}^N d\lambda_i}_{\mathcal{N}(0,\frac{1}{N}I_N)}\,.$$

- J_p devient (p impair): $J_p(s) = \frac{1}{2}|s|^{2/p}$, même fonction de taux que celle des grandes déviations de

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i^p,$$

avec $Y_1, \ldots, Y_N$ i.i.d $\mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$.

▷ Interaction logarithmique négligeable dans les déviations de $\mu_{X/\sqrt{N}}(x^p)$.

▷ Si X est une matrice du GUE, i.e $X \sim e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}H^2} dH$,

- la loi jointe des valeurs propres est

$$d\mathbb{P}_N = \frac{1}{Z_N} \underbrace{\prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2}_{\text{interaction}} \underbrace{e^{-\frac{N}{2}\sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \prod_{i=1}^N d\lambda_i}_{\mathcal{N}(0,\frac{1}{N}I_N)} .$$

- J_p devient (p impair): $J_p(s) = \frac{1}{2}|s|^{2/p}$, même fonction de taux que celle des grandes déviations de

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i^p,$$

avec $Y_1, ..., Y_N$ i.i.d $\mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$.

▷ Interaction logarithmique négligeable dans les déviations de $\mu_{X/\sqrt{N}}(x^p)$.

▷ Si X est une matrice du GUE, i.e $X \sim e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}H^2} dH$,

- la loi jointe des valeurs propres est

$$d\mathbb{P}_N = \frac{1}{Z_N} \underbrace{\prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2}_{\text{interaction}} \underbrace{e^{-\frac{N}{2}\sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \prod_{i=1}^N d\lambda_i}_{\mathcal{N}(0,\frac{1}{N}I_N)} .$$

- J_p devient (p impair): $J_p(s) = \frac{1}{2}|s|^{2/p}$, même fonction de taux que celle des grandes déviations de

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i^p ,$$

avec $Y_1, ..., Y_N$ i.i.d $\mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$.

▷ Interaction logarithmique négligeable dans les déviations de $\mu_{X/\sqrt{N}}(x^p)$.

▷ Si X est une matrice du GUE, i.e $X \sim e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}H^2} dH$,

- la loi jointe des valeurs propres est

$$d\mathbb{P}_N = \frac{1}{Z_N} \underbrace{\prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2}_{\text{interaction}} \underbrace{e^{-\frac{N}{2}\sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \prod_{i=1}^N d\lambda_i}_{\mathcal{N}(0,\frac{1}{N}I_N)} .$$

- J_p devient (p impair): $J_p(s) = \frac{1}{2}|s|^{2/p}$, même fonction de taux que celle des grandes déviations de

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i^p ,$$

avec $Y_1, ..., Y_N$ i.i.d $\mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$.

▷ Interaction logarithmique négligeable dans les déviations de $\mu_{X/\sqrt{N}}(x^p)$.

▷ Si X est une matrice du GUE, i.e $X \sim e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}H^2} dH$,

- la loi jointe des valeurs propres est

$$d\mathbb{P}_N = \frac{1}{Z_N} \underbrace{\prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^2}_{\text{interaction}} \underbrace{e^{-\frac{N}{2}\sum_{i=1}^N \lambda_i^2} \prod_{i=1}^N d\lambda_i}_{\mathcal{N}(0,\frac{1}{N}I_N)} .$$

- J_p devient (p impair): $J_p(s) = \frac{1}{2}|s|^{2/p}$, même fonction de taux que celle des grandes déviations de

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i^p,$$

  avec $Y_1, ..., Y_N$ i.i.d $\mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$.

▷ Interaction logarithmique négligeable dans les déviations de $\mu_{X/\sqrt{N}}(x^p)$.

▷ **Problèmes ouverts :** Cas $X_{i,j}$ bornées, $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$

- Grandes déviations de

$$\frac{1}{n^{1+p/2}} \mathrm{tr}(X - \mathbb{E}X)^p \ ?$$

$$\mu_{X/\sqrt{n}} \ ?$$

$$\lambda_{max}(X/\sqrt{n}) \ ?$$

▷ **Problèmes ouverts :** Cas $X_{i,j}$ bornées, $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$

- Grandes déviations de

$$\frac{1}{n^{1+p/2}}\mathrm{tr}(X - \mathbb{E}X)^p \ ?$$

$$\mu_{X/\sqrt{n}} \ ?$$

$$\lambda_{max}(X/\sqrt{n}) \ ?$$

▷ **Problèmes ouverts :** Cas $X_{i,j}$ bornées, $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$

- Grandes déviations de

$$\frac{1}{n^{1+p/2}} \mathrm{tr}(X - \mathbb{E}X)^p \ ?$$

$$\mu_{X/\sqrt{n}} \ ?$$

$$\lambda_{max}(X/\sqrt{n}) \ ?$$

▷ **Problèmes ouverts :** Cas $X_{i,j}$ bornées, $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$

- Grandes déviations de

$$\frac{1}{n^{1+p/2}} \mathrm{tr}(X - \mathbb{E}X)^p \ ?$$

$$\mu_{X/\sqrt{n}} \ ?$$

$$\lambda_{max}(X/\sqrt{n}) \ ?$$

▷ **Problèmes ouverts :** Cas $X_{i,j}$ bornées, $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$

- Grandes déviations de

$$\frac{1}{n^{1+p/2}} \mathrm{tr}(X - \mathbb{E}X)^p \ ?$$

$$\mu_{X/\sqrt{n}} \ ?$$

$$\lambda_{max}(X/\sqrt{n}) \ ?$$

▷ **Problèmes ouverts :** Cas $X_{i,j}$ bornées, $X_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$

- Grandes déviations de

$$\frac{1}{n^{1+p/2}} \mathrm{tr}(X - \mathbb{E}X)^p \ ?$$

$$\mu_{X/\sqrt{n}} \ ?$$

$$\lambda_{max}(X/\sqrt{n}) \ ?$$

Merci de votre attention !