

Champs stables harmonisables à accroissements stationnaires : Estimées supérieures des trajectoires

Geoffrey BOUTARD
En collaboration avec Antoine AYACHE

Laboratoire Paul PAINLEVÉ
Université Lille 1

Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens
18 avril 2016

Plan de l'exposé

- 1 Introduction et motivations
- 2 Représentation en série aléatoire d'ondelettes
- 3 Résultats sur le comportement trajectorien

Plan de l'exposé

- 1 Introduction et motivations
- 2 Représentation en série aléatoire d'ondelettes
- 3 Résultats sur le comportement trajectorien

Textures isotropes et anisotropes

On considère des champs aléatoires réels $\{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$.

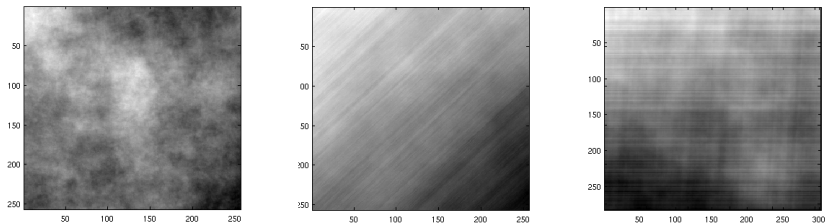


FIGURE : Différentes textures dans le cas $d = 2$

Mesure aléatoire stable

Soit M_α une mesure aléatoire sur \mathbb{R}^d α -stable, à valeurs complexes, invariante par rotation, contrôlée par la mesure de Lebesgue.

\implies Pour toute fonction $g \in L^\alpha(\mathbb{R}^d)$, la variable aléatoire $\mathcal{R}e \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) dM_\alpha(\xi) \right\}$ est de **loi symétrique α -stable** de paramètre d'échelle $\|g\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^d)}$, i.e. sa fonction caractéristique vérifie

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E} \left[e^{i\theta \mathcal{R}e \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) dM_\alpha(\xi) \right\}} \right] = e^{-|\theta|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |g(\xi)|^\alpha d\xi}. \quad (1.1)$$

Champs stables harmonisables à accroissements stationnaires

Soit f une fonction à valeurs réelles Lebesgue mesurable sur \mathbb{R}^d telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \min(1, \|\xi\|^\alpha) |f(\xi)|^\alpha d\xi < +\infty, \quad (1.2)$$

$\implies \forall t \in \mathbb{R}^d$, la fonction noyau $\xi \mapsto (e^{it \cdot \xi} - 1)f(\xi) \in L^\alpha(\mathbb{R}^d)$, et est donc intégrable pour la mesure M_α .

Le champ $\{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ est défini comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad X(t) = \mathcal{R}e \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} (e^{it \cdot \xi} - 1) f(\xi) dM_\alpha(\xi) \right\}. \quad (1.3)$$

Motivations

On veut étudier, presque sûrement en ω , le comportement des trajectoires de X :

$$X(\cdot, \omega) : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto X(t, \omega). \end{cases}$$

Motivations

On veut étudier, presque sûrement en ω , le comportement des trajectoires de X :

$$X(\cdot, \omega) : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto X(t, \omega). \end{cases}$$

Motivation 1 : Peut-on relier l'anisotropie du champs au comportement de f le long des axes de \mathbb{R}^d en l'infini ?

Motivations

On veut étudier, presque sûrement en ω , le comportement des trajectoires de X :

$$X(\cdot, \omega) : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto X(t, \omega). \end{cases}$$

Motivation 1 : Peut-on relier l'anisotropie du champs au comportement de f le long des axes de \mathbb{R}^d en l'infini ?

- Par exemple, est-il possible de contrôler pour " h_1 petit" l'accroissement

$$X(t_1 + h_1, t_2, \dots, t_d, \omega) - X(t_1, t_2, \dots, t_d, \omega),$$

de la trajectoire $X(\cdot, \omega)$ par un certaine puissance de $|h_1|$, à un facteur logarithmique près ?

Motivations

On veut étudier, presque sûrement en ω , le comportement des trajectoires de X :

$$X(\cdot, \omega) : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto X(t, \omega). \end{cases}$$

Motivation 1 : Peut-on relier l'anisotropie du champs au comportement de f le long des axes de \mathbb{R}^d en l'infini ?

- Par exemple, est-il possible de contrôler pour " h_1 petit" l'accroissement

$$X(t_1 + h_1, t_2, \dots, t_d, \omega) - X(t_1, t_2, \dots, t_d, \omega),$$

de la trajectoire $X(\cdot, \omega)$ par un certaine puissance de $|h_1|$, à un facteur logarithmique près ?

- Application : résistance de matériau.

Motivations

On veut étudier, presque sûrement en ω , le comportement des trajectoires de X :

$$X(\cdot, \omega) : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto X(t, \omega). \end{cases}$$

Motivation 1 : Peut-on relier l'anisotropie du champs au comportement de f le long des axes de \mathbb{R}^d en l'infini ?

- Par exemple, est-il possible de contrôler pour " h_1 petit" l'accroissement

$$X(t_1 + h_1, t_2, \dots, t_d, \omega) - X(t_1, t_2, \dots, t_d, \omega),$$

de la trajectoire $X(\cdot, \omega)$ par un certaine puissance de $|h_1|$, à un facteur logarithmique près ?

- Application : résistance de matériau.

Motivation 2 : Peut-on relier le comportement de $X(\cdot, \omega)$ à l'infini au comportement de f en zéro ?

Conditions sur la fonction f

Soit $p_* := \max \{2, \lfloor 1/\alpha \rfloor + 1\}$. La fonction f est dite admissible si :

(\mathcal{H}_1) Pour tout $p \in \{0, 1, 2, \dots, p_*\}^d$, la dérivée partielle $\partial^p f$ est bien définie et continue sur $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^d$.

Conditions sur la fonction f

Soit $p_* := \max \{2, \lfloor 1/\alpha \rfloor + 1\}$. La fonction f est dite admissible si :

(\mathcal{H}_1) Pour tout $p \in \{0, 1, 2, \dots, p_*\}^d$, la dérivée partielle $\partial^p f$ est bien définie et continue sur $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^d$.

(\mathcal{H}_2) Il existe $c' > 0$ et $a' \in (0, 1)$ tels que, pour tout $p \in \{0, 1, 2, \dots, p_*\}^d$, et $\xi \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^d$,

$$\|\xi\| \leq \frac{8\pi}{3} \sqrt{d} \implies |\partial^p f(\xi)| \leq c' \|\xi\|^{-a' - d/\alpha - p_1 - \dots - p_d}. \quad (1.4)$$

Conditions sur la fonction f

Soit $p_* := \max \{2, \lfloor 1/\alpha \rfloor + 1\}$. La fonction f est dite admissible si :

(\mathcal{H}_1) Pour tout $p \in \{0, 1, 2, \dots, p_*\}^d$, la dérivée partielle $\partial^p f$ est bien définie et continue sur $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^d$.

(\mathcal{H}_2) Il existe $c' > 0$ et $a' \in (0, 1)$ tels que, pour tout $p \in \{0, 1, 2, \dots, p_*\}^d$, et $\xi \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^d$,

$$\|\xi\| \leq \frac{8\pi}{3} \sqrt{d} \implies |\partial^p f(\xi)| \leq c' \|\xi\|^{-a' - d/\alpha - p_1 - \dots - p_d}. \quad (1.4)$$

(\mathcal{H}_3) Il existe $c > 0$ et $a_1, \dots, a_d > 0$ vérifiant pour tout $p \in \{0, 1, 2, \dots, p_*\}^d$, et $\xi \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^d$,

$$\|\xi\| \geq \frac{2\pi}{3} \implies |\partial^p f(\xi)| \leq c \prod_{l=1}^d (1 + |\xi_l|)^{-a_l - 1/\alpha - p_l}. \quad (1.5)$$

Plan de l'exposé

- 1 Introduction et motivations
- 2 Représentation en série aléatoire d'ondelettes
- 3 Résultats sur le comportement trajectorien

Famille d'ondelettes de $L^\alpha(\mathbb{R}^d)$

Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'ondelette mère 1D de Lemarié-Meyer.

→ Sa transformée de Fourier $\widehat{\psi} \in S(\mathbb{R})$ et a un support compact vérifiant :

$$\text{supp } \widehat{\psi} \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \frac{2\pi}{3} \leq |\lambda| \leq \frac{8\pi}{3} \right\}. \quad (2.1)$$

On considère ensuite la famille $\{\widehat{\psi}_{\alpha,J,K}; (J, K) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d\}$ obtenue ainsi : pour tout $(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\psi_{\alpha,J,K}(t_1, \dots, t_d) := \prod_{l=1}^d 2^{j_l(1-1/\alpha)} \psi(2^{j_l} t_l - k_l). \quad (2.2)$$

Références : Les livres de MEYER (1990) et DAUBECHIES (1992).

Décomposition du noyau

Décomposition en ondelettes du noyau de X

A t fixé, le noyau $\xi \mapsto (e^{it \cdot \xi} - 1)f(\xi)$, peut s'écrire comme :

$$(e^{it \cdot \xi} - 1)f(\xi) = \sum_{(J,K) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} s_{\alpha,J,K}(t) \overline{\widehat{\psi_{\alpha,J,K}}(\xi)}, \quad (2.3)$$

où la série converge dans $L^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

→ Idée de la preuve : les fonctions $s_{\alpha,J,K}$ sont bien localisées.

On obtient alors

$$X(t) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{(J,K) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} s_{\alpha,J,K}(t) \overline{\widehat{\psi}_{\alpha,J,K}(\xi)} \right) dM_{\alpha}(\xi) \right\}. \quad (2.4)$$

Ensuite, en utilisant une propriété de l'intégrale stable, on obtient :

Proposition 2.1 (Représentation en ondelettes de X)

Le champ $\{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ peut être exprimé, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ fixé, comme

$$X(t) = \sum_{(J,K) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} s_{\alpha,J,K}(t) \epsilon_{\alpha,J,K}, \quad (2.5)$$

où la série converge en probabilité.

Les $\epsilon_{\alpha,J,K}$ sont des variables aléatoires symétriques α -stables réelles de même loi :

$$\epsilon_{\alpha,J,K} := \operatorname{Re} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}_{\alpha,J,K}(\xi) dM_{\alpha}(\xi) \right\}. \quad (2.6)$$

Plan de l'exposé

- 1 Introduction et motivations
- 2 Représentation en série aléatoire d'ondelettes
- 3 Résultats sur le comportement trajectorien

Le comportement trajectorien de X est déterminé par le comportement asymptotique de la suite $\{\epsilon_{\alpha,J,K} : (J, K) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d\}$.

Lemme 3.1

Il existe un événement Ω^* de probabilité 1 dépendant de α et vérifiant : pour tous $\delta > 0$ et $\omega \in \Omega^*$, il existe $C(\omega) > 0$ telle que

$$|\epsilon_{\alpha,J,K}(\omega)| \leq \begin{cases} C(\omega) \prod_{l=1}^d (1 + |j_l|)^{1/\alpha+\delta}, & \text{si } \alpha \in (0, 1) \\ C(\omega) \sqrt{\log \left(3 + \sum_{l=1}^d (|j_l| + |k_l|) \right)} \prod_{l=1}^d (1 + |j_l|)^{1/\alpha+\delta}, & \text{si } \alpha \in [1, 2) \\ C(\omega) \sqrt{\log \left(3 + \sum_{l=1}^d (|j_l| + |k_l|) \right)}, & \text{si } \alpha = 2 \end{cases} \quad (3.1)$$

pour tous $J = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$ et $K \in \mathbb{Z}^d$.

"Surprise" : Quand $\alpha \in (0, 1)$, $|\epsilon_{\alpha,J,K}(\omega)|$ est bornée indépendamment de K .

Cas particulier : $d = 2$ et $a_1 \in (0, 1)$.

Théorème 3.1 (Comportement directionnel de X)

Soient $T \in (0, +\infty)$ et $\omega \in \Omega^*$ arbitraires.

(i) Si $\alpha = 2$, il existe $C(\omega) > 0$ telle que pour tous $(t_1, t_2) \in [-T, T]^2$ et $h_1 \in \mathbb{R}$,

$$|X(t_1 + h_1, t_2, \omega) - X(t_1, t_2, \omega)| \leq C(\omega) |h_1|^{a_1} \left(\log \left(3 + |h_1|^{-1} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

(ii) Si $\alpha \in (0, 2)$, pour tout $\delta > 0$ petit, il existe $C(\omega) > 0$ telle que pour tous $(t_1, t_2) \in [-T, T]^2$ et $h_1 \in \mathbb{R}$,

$$|X(t_1 + h_1, t_2, \omega) - X(t_1, t_2, \omega)| \leq C(\omega) |h_1|^{a_1} \left(\log \left(3 + |h_1|^{-1} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha} + \frac{|\alpha|}{2} + \delta}. \quad (3.3)$$

→ Si $a_1 = 1$, le facteur logarithmique change; et si $a_1 > 1$, il faut considérer des accroissements d'ordre supérieur.

Théorème 3.2 (Comportement de X à l'infini)

Soit $a' \in (0, 1)$ l'exposant gouvernant l'explosion de f en 0. Soient $\delta \in (0, +\infty)$ et $\omega \in \Omega^*$ arbitraires.

- ❶ Si $\alpha \in (0, 1)$, il existe $C(\omega) > 0$ telle que pour tout $\|t\| \geq 1$

$$|X(t, \omega)| \leq C(\omega) \|t\|^{a'} (\log(3 + \|t\|))^{1/\alpha + \delta}. \quad (3.4)$$








- ❷ Si $\alpha \in [1, 2)$, il existe $C(\omega) > 0$ telle que pour tout $\|t\| \geq 1$

$$|X(t, \omega)| \leq C(\omega) \|t\|^{a'} (\log(3 + \|t\|))^{1/2 + 1/\alpha + \delta}. \quad (3.5)$$

- ❸ Si $\alpha = 2$, il existe $C(\omega) > 0$ telle que pour tout $\|t\| \geq 1$

$$|X(t, \omega)| \leq C(\omega) \|t\|^{a'} (\log \log(3 + \|t\|))^{1/2}. \quad (3.6)$$

References

-  A. AYACHE, G. BOUTARD. *Stationary increments harmonizable stable fields : upper estimates on path behaviour* (2015),
-  A. AYACHE, S. JAFFARD, M.S. TAQQU. *Wavelet construction of Generalized Multifractal processes* (2007),
-  A. AYACHE, M.S. TAQQU. *Multifractal Processes with Random Exponent* (2005),
-  A. AYACHE, Y. XIAO. *Asymptotic properties and Hausdorff Dimensions of Fractional Brownian Sheets* (2005),
-  A. BONAMI, A. ESTRADE. *Anisotropic Analysis of Some Gaussian Models* (2003),
-  R. JENNANE, R. HARBA, E. PERRIN, A. BONAMI, A. ESTRADE. *Analyse de champs browniens fractionnaires anisotropes*.
-  K. POLISANO. *Génération de textures comme champs aléatoires et détection de l'anisotropie* (2013).

Merci de votre attention !