Polynômes aléatoires et Gaz de Coulomb

Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens

Raphaël Butez

Présentation des objets:

- $a_0, \ldots, a_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Présentation des objets:

- $a_0, \dots, a_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  $\star$ Pour cet exposé: $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$ ou $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$

Présentation des objets:

- $a_0, \ldots, a_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  $\star$ Pour cet exposé: $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$ ou $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$
- $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ suite de polynômes aléatoires.

Présentation des objets:

- $a_0, \dots, a_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  $\star$ Pour cet exposé: $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$ ou $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$
- $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ suite de polynômes aléatoires.
- $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ zéros (aléatoires) de P_n.

Présentation des objets:

- $a_0, \dots, a_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  $\star$ Pour cet exposé: $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$ ou $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$
- $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ suite de polynômes aléatoires.
- $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ zéros (aléatoires) de P_n.
- mesure empirique: $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{z_k} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

Présentation des objets:

- $a_0, \dots, a_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  $\star$ Pour cet exposé: $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$ ou $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$
- $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ suite de polynômes aléatoires.
- $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ zéros (aléatoires) de P_n.
- mesure empirique: $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{z_k} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$
- nombre de points dans un ensemble: $N_A = n\mu_n(A)$, $A \subset \mathbb{C}$.

Questions classiques.

- Combien de racines réelles pour n grand? Etude de $N_{\mathbb{R}}$.

Questions classiques.

- Combien de racines réelles pour n grand? Etude de $N_{\mathbb{R}}$.
- $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une mesure déterministe?

Questions classiques.

- Combien de racines réelles pour n grand? Etude de $N_{\mathbb{R}}$.
- $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une mesure déterministe?
- Si $\mu_n \Rightarrow \nu$, vitesse de convergence? Grandes déviations?

Questions classiques.

- Combien de racines réelles pour n grand? Etude de $N_{\mathbb{R}}$.
- $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une mesure déterministe?
- Si $\mu_n \Rightarrow \nu$, vitesse de convergence? Grandes déviations?
- Universalité?

Questions classiques.

- Combien de racines réelles pour n grand? Etude de $N_{\mathbb{R}}$.
- $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une mesure déterministe?
- Si $\mu_n \Rightarrow \nu$, vitesse de convergence? Grandes déviations?
- Universalité?
- Que dire de $\min |z_k|$, $\max |z_k|$?

Objet d'étude historique: $N_{\mathbb{R}}$, $a_i \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{E}(N_{\mathbb{R}}) \sim \frac{2}{\pi} \log n$

Figure: Marc Kac a prouvé ce résultat en 1940

Objet d'étude historique: $N_{\mathbb{R}}$, $a_i \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{E}(N_{\mathbb{R}}) \sim \frac{2}{\pi} \log n$

Figure: Marc Kac a prouvé ce résultat en 1940

- Vrai dès que les coefficients ont une espérance nulle.

Objet d'étude historique: $N_{\mathbb{R}}$, $a_i \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{E}(N_{\mathbb{R}}) \sim \frac{2}{\pi} \log n$

Figure: Marc Kac a prouvé ce résultat en 1940

- Vrai dès que les coefficients ont une espérance nulle.
- Et on peut dire beaucoup plus de choses (TCL, bornes sur $N_{\mathbb{R}}$...)

Etude macroscopique.
Etude de μ_n:

Theorem (Ibragimov Zaporozhets 2013)

$\mu_n \Rightarrow \nu_{S^1}$ si et seulement si $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$.

- ν_{S^1} est la mesure uniforme sur S^1.

Etude macroscopique.
Etude de μ_n:

Theorem (Ibragimov Zaporozhets 2013)

$\mu_n \Rightarrow \nu_{S^1}$ si et seulement si $\mathbb{E}(\log(1+|a_0|)) < \infty$.

- ν_{S^1} est la mesure uniforme sur S^1.
- $\mu_n \Rightarrow \nu_{S^1}$ signifie: $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{C}), \langle \phi, \mu_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \langle \phi, \nu_{S^1} \rangle$.

Etude macroscopique.
Etude de μ_n:

Theorem (Ibragimov Zaporozhets 2013)

$\mu_n \Rightarrow \nu_{S^1}$ si et seulement si $\mathbb{E}(\log(1 + |a_0|)) < \infty$.

- ν_{S^1} est la mesure uniforme sur S^1.
- $\mu_n \Rightarrow \nu_{S^1}$ signifie: $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{C}), \langle \phi, \mu_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \langle \phi, \nu_{S^1} \rangle$.
- Comportement macroscopique.

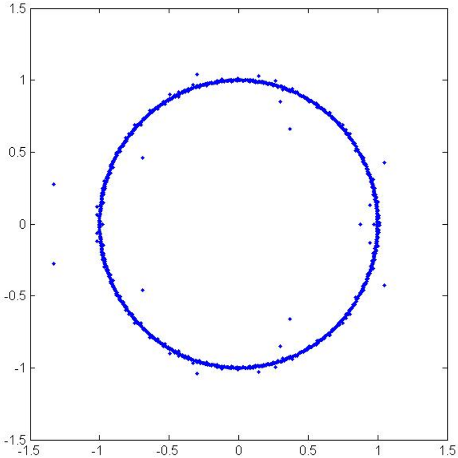

Figure: $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$

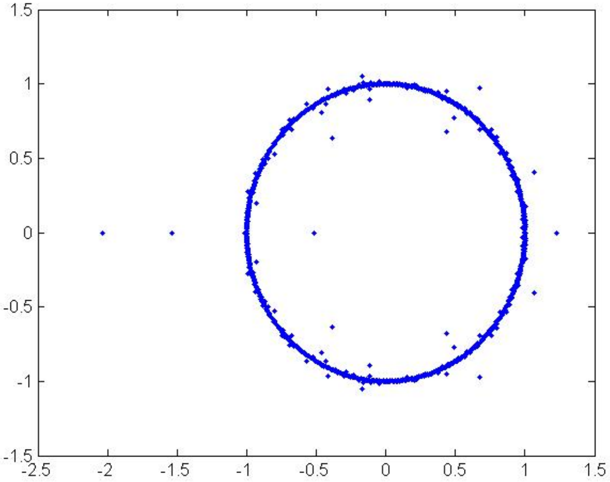

Figure: $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$

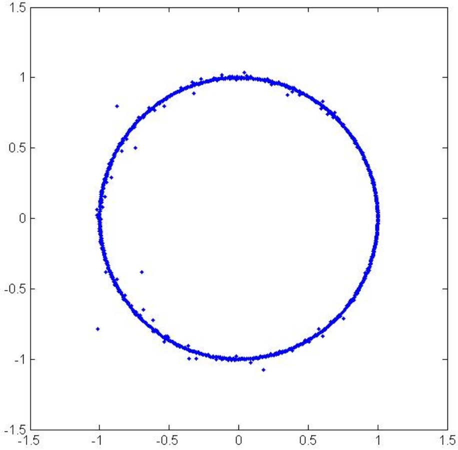

Figure: $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(5+2i,1)$

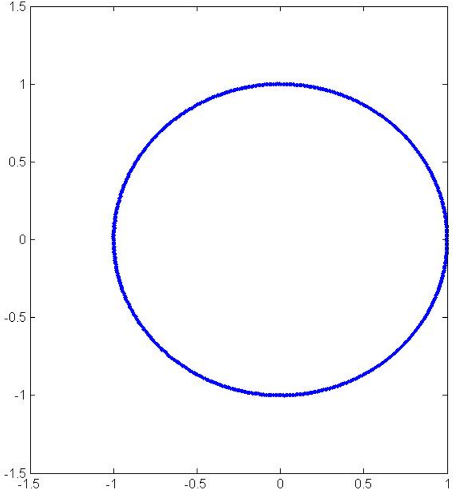

Figure: $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(17 + 52i, 1)$

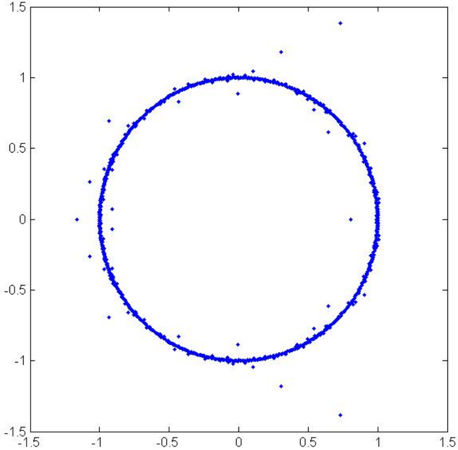

Figure: Rademacher

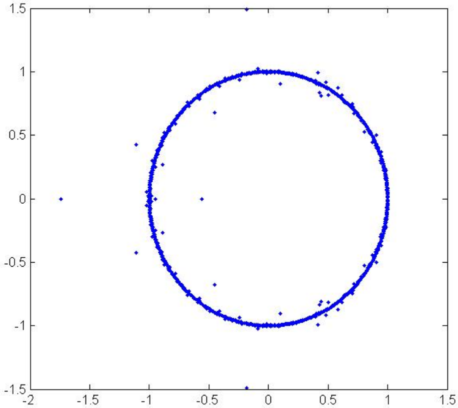

Figure: Uniforme sur $[0, 1]$

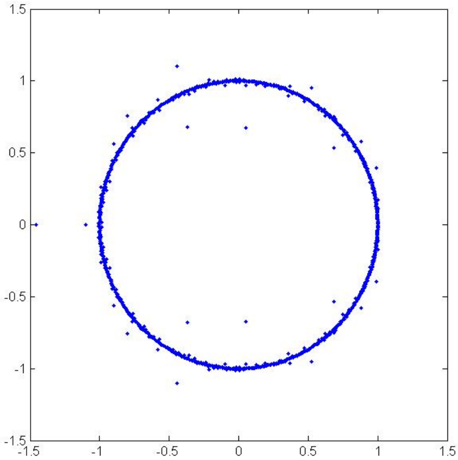

Figure: Loi exponentielle

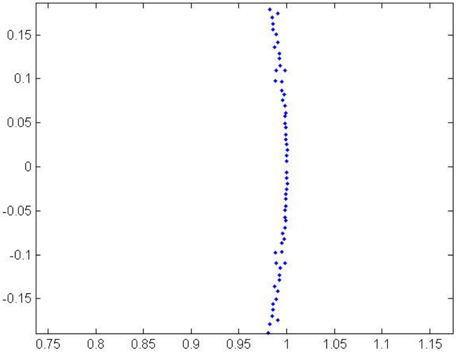

Figure: zoom en 1

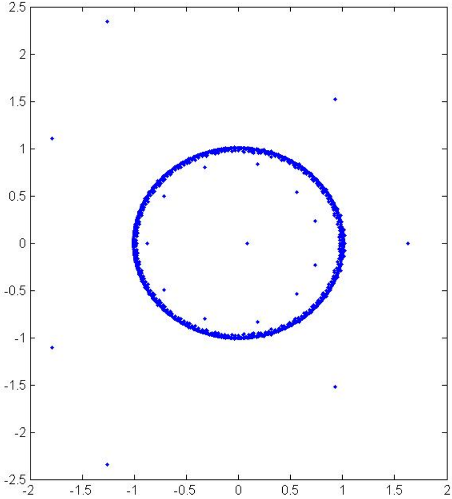

Figure: Loi de Cauchy

Ma passion dans la vie.

Theorem (Zeitouni Zelditch 2009 , Grandes déviations pour μ_n)

Si les $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$ *alors:*

$$(z_1, \dots, z_n) \sim \frac{1}{Z} \frac{\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2}{\left(\int \prod_{k=1}^{n} |z - z_i|^2 d\nu_{S^1} \right)^{n+1}}$$

Dans ce cas, pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ *on a:*

$$-\inf_{\mu \in \operatorname{int} A} I(\mu) \leq \underline{\lim} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq \overline{\lim} \frac{1}{n^2} \log \mathbb{P}(\mu_n \in A) \leq -\inf_{\mu \in \bar{A}} I(\mu).$$

où $I(\mu) = \iint -\log|z - w| d\mu(z) d\mu(w) + 2 \sup_{z \in S^1} \int \log|z - w| d\mu(z)$ *est une bonne fonction de taux, convexe, positive et s'annulant en* ν_{S^1}.

Cette densité peut se réécrire:

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(-\beta_n H(z_1, \ldots, z_n)\right) d\ell_{\mathbb{C}^n}(z_1, \ldots, z_n)$$

avec

$$H(z_1, \ldots, z_n) = -\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \log|z_i - z_j| + \frac{n+1}{n^2} \log \int e^{2n \frac{1}{n} \sum \log|z - z_i|} d\nu_S(z)$$

Rappels de physique.

- Dans $\mathbb{R}^3$, l'énergie Coulombienne est en $\frac{1}{\|x\|}$.

Rappels de physique.

- Dans $\mathbb{R}^3$, l'énergie Coulombienne est en $\frac{1}{\|x\|}$.
- C'est parce que la solution fondamentale du Laplacien $(-\Delta f = c_3 \delta_0)$

Rappels de physique.

- Dans $\mathbb{R}^3$, l'énergie Coulombienne est en $\frac{1}{\|x\|}$.
- C'est parce que la solution fondamentale du Laplacien $(-\Delta f = c_3\delta_0)$
- En dimension d, l'énergie Coulombienne est donnée par cette solution fondamentale.

Rappels de physique.

- Dans $\mathbb{R}^3$, l'énergie Coulombienne est en $\frac{1}{\|x\|}$.
- C'est parce que la solution fondamentale du Laplacien $(-\Delta f = c_3\delta_0)$
- En dimension d, l'énergie Coulombienne est donnée par cette solution fondamentale.
- En dimension 2, on a donc une énergie $\log|x|$.

Rappels de physique.

- Dans $\mathbb{R}^3$, l'énergie Coulombienne est en $\frac{1}{\|x\|}$.
- C'est parce que la solution fondamentale du Laplacien ($-\Delta f = c_3 \delta_0$)
- En dimension d, l'énergie Coulombienne est donnée par cette solution fondamentale.
- En dimension 2, on a donc une énergie $\log|x|$.
- $\iint -\log|z-w| d\mu(z) d\mu(w)$ est l'énergie de la distribution de charges μ.

Rappels de physique.

- Dans $\mathbb{R}^3$, l'énergie Coulombienne est en $\frac{1}{\|x\|}$.
- C'est parce que la solution fondamentale du Laplacien ($-\Delta f = c_3\delta_0$)
- En dimension d, l'énergie Coulombienne est donnée par cette solution fondamentale.
- En dimension 2, on a donc une énergie $\log|x|$.
- $\iint -\log|z-w|d\mu(z)d\mu(w)$ est l'énergie de la distribution de charges μ.
- $z_1,\dots,z_n$ ont le même comportement que n électrons dans $\mathbb{C}$ soumis à un confinement "pas standard".

$$-\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}\log|z_i-z_j| + \frac{n+1}{n^2}\log\int e^{2n\frac{1}{n}\sum\log|z-z_i|}d\nu_S(z)$$

Extension du principe de grandes déviations.

- Si les $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$, on a aussi un PGD à vitesse n^2 de fonction de taux $\frac{1}{2}I$. (2015, B.)

Extension du principe de grandes déviations.

- Si les $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$, on a aussi un PGD à vitesse n^2 de fonction de taux $\frac{1}{2}I$. (2015, B.)
- Pour des coefficients $\mathcal{E}(1)$, c'est aussi vrai (Ghosh, Zeitouni 2013).

Extension du principe de grandes déviations.

- Si les $a_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$, on a aussi un PGD à vitesse n^2 de fonction de taux $\frac{1}{2}I$. (2015, B.)
- Pour des coefficients $\mathcal{E}(1)$, c'est aussi vrai (Ghosh, Zeitouni 2013).
- En fait c'est universel (B, Zeitouni, Mai 2016 si je me motive pour taper...) dès que les coefficients ont une densité positive en 0 et avec des moments de tous ordres.

BONUS: A-t-on $\max|z_k| \to 1$**?** $\min|z_k| \to 1$?

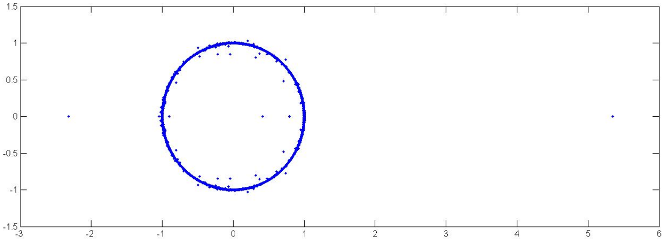

Figure: Convergence de la plus grande racine

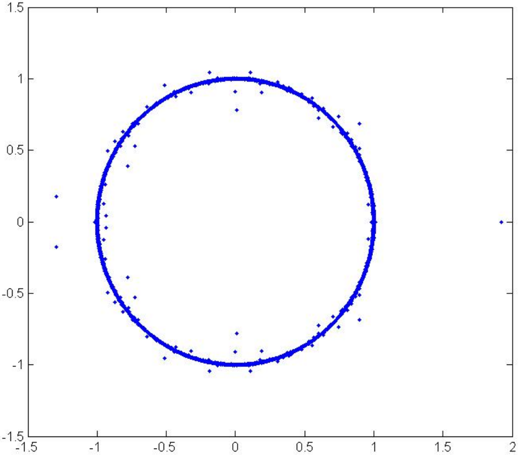

Figure: Convergence de la plus grande racine

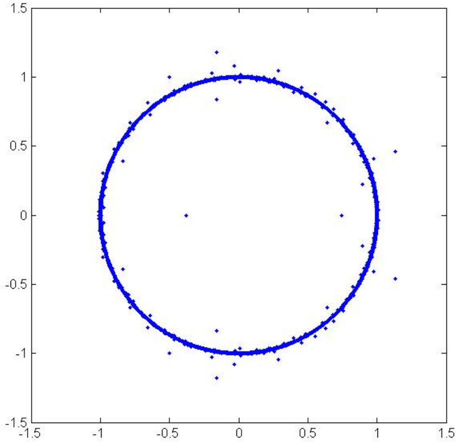

Figure: Convergence de la plus grande racine

Pas du tout.

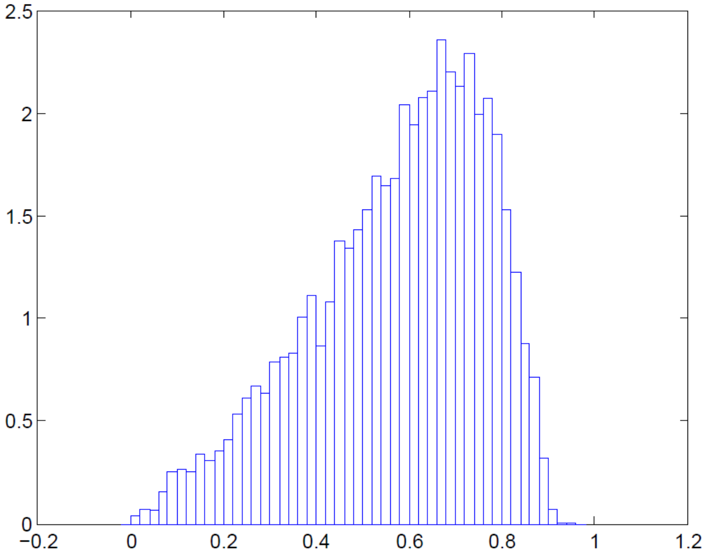

Figure: Loi de la plus petite racine en module. Coefficients $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$

Rappel: $r_n = \min |z_k|$ et $\frac{1}{\max |z_k|}$ ont même loi.

Theorem (Colloraire de Peres-Virag 2003)

$(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s. vers le module de la plus petite racine de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, qui a pour fonction de répartition sur $[0,1]$:

$$F(t) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty}(1 - t^{2k}).$$

On en déduit facilement que $\max |z_i|$ tend vers une loi de variance infinie.

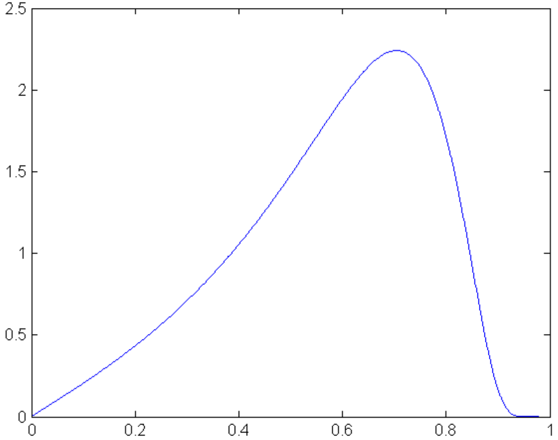

Figure: Loi limite.

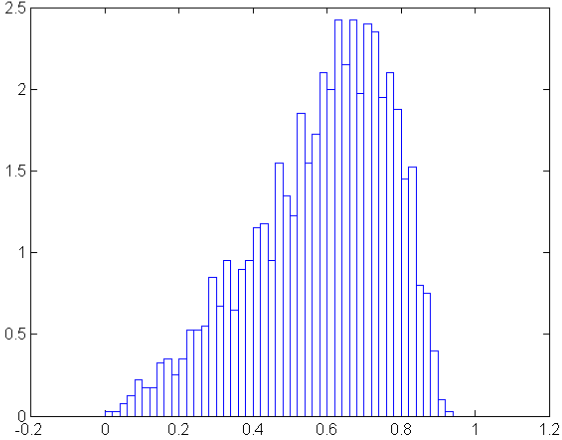

Figure: $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$

Universalité du comportement de la plus grande racine.

- Si les coefficients complexes, de densité g, avec $g(0) > 0$, $\max |z_k|$ est de variance infinie quel que soit n.

Universalité du comportement de la plus grande racine.

- Si les coefficients complexes, de densité g, avec $g(0) > 0$, $\max |z_k|$ est de variance infinie quel que soit n.
- Si les coefficients sont réels, de densité g, avec $g(0) > 0$ $\max |z_k|$ est d'espérance infinie quel que soit n.

Universalité du comportement de la plus grande racine.

- Si les coefficients complexes, de densité g, avec $g(0) > 0$, $\max |z_k|$ est de variance infinie quel que soit n.
- Si les coefficients sont réels, de densité g, avec $g(0) > 0$ $\max |z_k|$ est d'espérance infinie quel que soit n.
- C'est une application immédiate du théorème de Rouché.

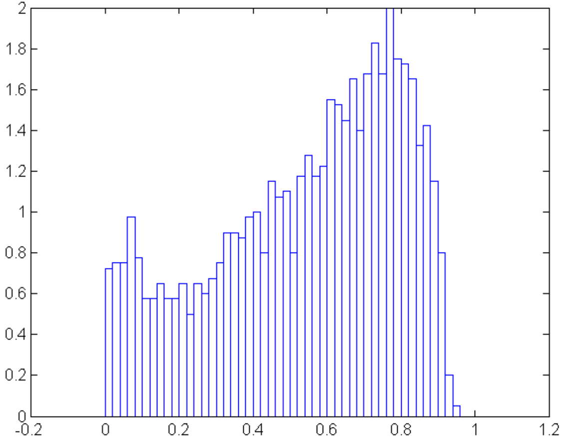

Figure: $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$

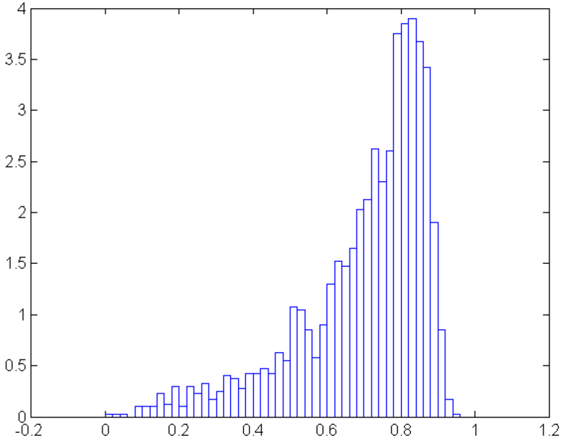

Figure: Loi uniforme sur un carré

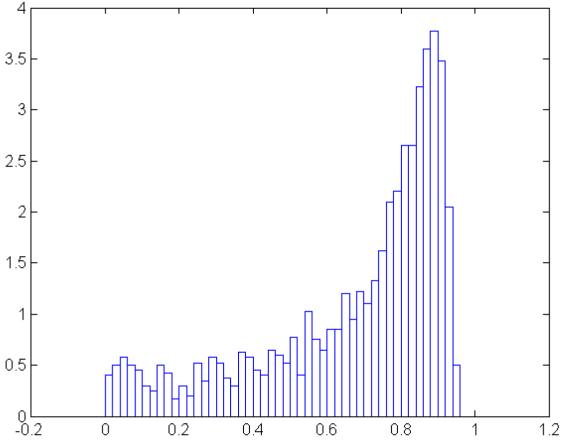

Figure: Loi uniforme sur $[0, 1]$

Questions futures.

- Second ordre dans le principe de grandes déviations. (en projet)
- Convergence des petites racines vers un processus de Poisson.
- Vitesse de convergence pour μ_n (en distance de Wasserstein)
- Théorème Central Limite pour $\langle \phi, \mu_n \rangle$, $\phi \in H^1$. (je ne sais pas si c'est connu)

Merci pour votre attention.