Processus d'exploration des arbres aléatoires en temps continu à branchement non binaire. Limite en grande population

Ibrahima DRAME [1], *Pr. A. Bamba SOW* [1] *& Pr. Etienne PARDOUX* [2]

[1] **Université Gaston Berger de Saint-Louis**
[2] **Université Aix Marseille**

Laboratoire d' Études et de Recherches en Statistique et Développement (**LERSTAD**)
L' Institut de Mathématiques de Marseille (**I2M**)

Du 18 au 22 Avril 2016, Houches, France

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Introduction

- Le point de départ de ce travail est la description du processus d'exploration d'arbre généalogique de Galton-Waton en temps continu avec naissance multiples.
- Ensuite nous décrivons une certaine bijection et on montre que l'arbre obtenu en dessous d'une trajectoire d'un processus d'exploration à la même loi qu'un arbre de Galton-Watson.
- Après nous allons étudier la limite en grande population de tels processus de branchement et leur processus d'exploration, en utilisant la renormalisation bien connue.
- Enfin on retrouve une extension du second théorème de Ray-Knight.

Introduction

- Le point de départ de ce travail est la description du processus d'exploration d'arbre généalogique de Galton-Waton en temps continu avec naissance multiples.
- Ensuite nous décrivons une certaine bijection et on montre que l'arbre obtenu en dessous d'une trajectoire d'un processus d'exploration à la même loi qu'un arbre de Galton-Watson.
- Après nous allons étudier la limite en grande population de tels processus de branchement et leur processus d'exploration, en utilisant la renormalisation bien connue.
- Enfin on retrouve une extension du second théorème de Ray-Knight.

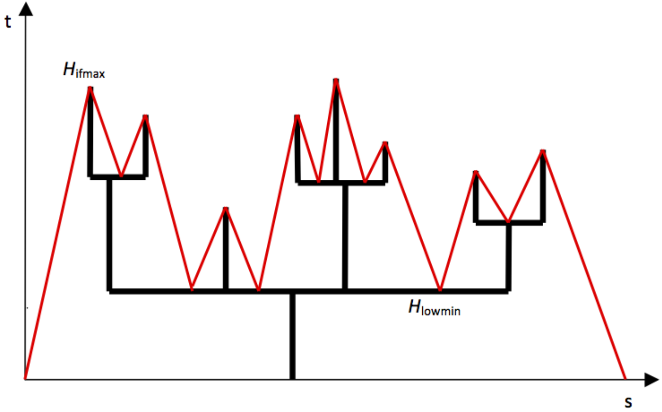
Introduction

- Le point de départ de ce travail est la description du processus d'exploration d'arbre généalogique de Galton-Waton en temps continu avec naissance multiples.
- Ensuite nous décrivons une certaine bijection et on montre que l'arbre obtenu en dessous d'une trajectoire d'un processus d'exploration à la même loi qu'un arbre de Galton-Watson.
- Après nous allons étudier la limite en grande population de tels processus de branchement et leur processus d'exploration, en utilisant la renormalisation bien connue.
- Enfin on retrouve une extension du second théorème de Ray-Knight.

Introduction

- Le point de départ de ce travail est la description du processus d'exploration d'arbre généalogique de Galton-Waton en temps continu avec naissance multiples.
- Ensuite nous décrivons une certaine bijection et on montre que l'arbre obtenu en dessous d'une trajectoire d'un processus d'exploration à la même loi qu'un arbre de Galton-Watson.
- Après nous allons étudier la limite en grande population de tels processus de branchement et leur processus d'exploration, en utilisant la renormalisation bien connue.
- Enfin on retrouve une extension du second théorème de Ray-Knight.

Bijection



Plan

Préliminaires

- Soit $p > 0$ fixé. On note par $\mathcal{H}_{p,m}$ l'ensemble des fonctions $H : s \mapsto H(s)$ linéaire par morceaux définies sur $[0, T_m]$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$ partant de $(0, 0)$ avec une pente p et de pentes alternatives $+p$ et $-p$, réfléchi dés qu'elle touche zéro, et arrêtée au premier instant T_m où elle revient en zéro pour m-ieme fois, qu'on suppose fini. On écrit $\mathcal{H}_p$ pour $\mathcal{H}_{p,1}$.

Préliminaires

- On note également par $\Im$ l'ensemble des arbres enracinés finis et par $\Im_m$ l'ensemble des forêts d'arbres qui sont union de m éléments de $\Im$.
- Il est bien connu qu'on a une bijection Φ_p entre $\mathcal{H}_p$ et $\Im$ qui a tout processus d'exploration associe un arbre aléatoire.

Préliminaires

- On note également par $\Im$ l'ensemble des arbres enracinés finis et par $\Im_m$ l'ensemble des forêts d'arbres qui sont union de m éléments de $\Im$.
- Il est bien connu qu'on a une bijection Φ_p entre $\mathcal{H}_p$ et $\Im$ qui a tout processus d'exploration associe un arbre aléatoire.

Préliminaires

- Soit H un processus stochastique dont la trajectoire appartient à $\mathcal{H}_2$.
- Soit $\{V_s, s \geq 0\}$ un processus à valeurs dans $\{-1, 1\}$ qui est tel que s-presque partout, $dH_s/ds = 2V_s$.
- Soient $\{P_s^+, s \geq 0\}$ et $\{P_s^-, s \geq 0\}$ deux processus de Poisson mutuellement indépendants d'intensités respectives λ et μ.
- Soit $(\Theta_k, k \geq 1)$ une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$. Θ_k désignera le nombre de nouveau-né au k-ieme évènement de naissance, où les évènements sont numérotés dans l'ordre qu'ils sont explorés.

Préliminaires

- Soit H un processus stochastique dont la trajectoire appartient à $\mathcal{H}_2$.
- Soit $\{V_s, s \geq 0\}$ un processus à valeurs dans $\{-1, 1\}$ qui est tel que s-presque partout, $dH_s/ds = 2V_s$.
- Soient $\{P_s^+, s \geq 0\}$ et $\{P_s^-, s \geq 0\}$ deux processus de Poisson mutuellement indépendants d'intensités respectives λ et μ.
- Soit $(\Theta_k, k \geq 1)$ une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$. Θ_k désignera le nombre de nouveau-né au k-ieme évènement de naissance, où les évènements sont numérotés dans l'ordre qu'ils sont explorés.

Préliminaires

- Soit H un processus stochastique dont la trajectoire appartient à $\mathcal{H}_2$.
- Soit $\{V_s, s \geq 0\}$ un processus à valeurs dans $\{-1, 1\}$ qui est tel que s-presque partout, $dH_s/ds = 2V_s$.
- Soient $\{P_s^+, s \geq 0\}$ et $\{P_s^-, s \geq 0\}$ deux processus de Poisson mutuellement indépendants d'intensités respectives λ et μ.
- Soit $(\Theta_k, k \geq 1)$ une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$. Θ_k désignera le nombre de nouveau-né au k-ieme évènement de naissance, où les évènements sont numérotés dans l'ordre qu'ils sont explorés.

Préliminaires

- Soit H un processus stochastique dont la trajectoire appartient à $\mathcal{H}_2$.
- Soit $\{V_s, s \geq 0\}$ un processus à valeurs dans $\{-1, 1\}$ qui est tel que s-presque partout, $dH_s/ds = 2V_s$.
- Soient $\{P_s^+, s \geq 0\}$ et $\{P_s^-, s \geq 0\}$ deux processus de Poisson mutuellement indépendants d'intensités respectives λ et μ.
- Soit $(\Theta_k, k \geq 1)$ une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  Θ_k désignera le nombre de nouveau-né au k-ieme évènement de naissance, où les évènements sont numérotés dans l'ordre qu'ils sont explorés.

Temps local

On définit le temps local $L_s(t)$ du processus d'exploration H au niveau t à l'instant s par la formule :

$$L_s(t) \quad = \quad \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mathbf{1}_{\{t \leq H_r < t+\varepsilon\}} dr.$$

Naissances multiples (Cas Sous-Critique)

- Dans le cas où le nombre d'enfants à chaque naissance est aléatoire, le processus d'exploration H est défini à partir du processus V par la relation suivante :

$$\frac{dH_s}{ds} = 2V_s, \quad H_0 = 0, \quad V_0 = 1$$

$$V_s = 1 + 2\int_0^s \mathbf{1}_{\{V_{r^-}=-1\}} dP_r^+ - 2\int_0^s \mathbf{1}_{\{V_{r^-}=+1\}} dP_r^-$$

$$+ 2(L_s(0) - L_{0^+}(0)) + 2\sum_{k>0, S_k^+ \leq s} (L_s(H_{S_k^+}) - L_{S_k^+}(H_{S_k^+})) \wedge (\Theta_k - 1),$$

où $(S_k^+,\ k \geq 1)$ sont les instants successives de sauts du processus

$$\widetilde{P}_s^+ = \int_0^s \mathbf{1}_{\{V_{r^-}=-1\}} dP_r^+.$$

Naissances multiples (Cas SurCritique)

$$\frac{dH^\Gamma_s}{ds} = 2V_s, \quad H^\Gamma_0 = 0, \quad V_0 = 1$$

$$V_s = 1 + 2\int_0^s \mathbf{1}_{\{V_{r^-}=-1\}} dP^+_r - 2\int_0^s \mathbf{1}_{\{V_{r^-}=+1\}} dP^-_r - 2L^\Gamma_s(\Gamma^-)$$

$$+ 2(L^\Gamma_s(0) - L^\Gamma_{0^+}(0)) + 2\sum_{k>0, S^+_k \le s} (L^\Gamma_s(H^\Gamma_{S^+_k}) - L^\Gamma_{S^+_k}(H^\Gamma_{S^+_k})) \wedge (\Theta_k - 1).$$

Naissances multiples

- On définit l'espérance et la variance du nombre de naissance à chaque évènement de naissance par :

$$a = \sum_{\ell \geq 1} \ell \mathbb{P}(\Theta_1 = \ell) \quad \text{et} \quad \zeta^2 = \sum_{\ell \geq 1} (\ell - a)^2 \mathbb{P}(\Theta_1 = \ell).$$

- Soit π la loi commune des v.a $(\Theta_k, k \geq 1)$.
- On note par Υ la sous collection π, λ, μ (i.e $\Upsilon = \{\pi, \lambda, \mu\}$) et on note également $\mathbb{P}_{\Upsilon, \Gamma}$ la loi du processus $(H_s^\Gamma, \ s \geq 0)$.

Arbre Non-binaire Galton Watson

- On considère un arbre non binaire de G-W tué à un niveau $\Gamma > 0$ définit comme suit : la durée de vie de chaque individu est exponentielle d'espérance μ^{-1}. Les évènements de naissance arrivent suivant un processus Poisson d'intensité λ et à chaque temps de naissance, il y'a un nombre aléatoire de descendants de loi π.
- On note par $\mathbb{Q}_{\Upsilon,\Gamma}$ la loi de cet élément aléatoire à valeurs dans $\Im$.

Correspondance des lois

Théorème 1

Pour tout Υ et $\Gamma \in (0, +\infty)$ (y compris le cas $\Gamma = +\infty$ quand $\lambda < \mu$), nous avons la représentation suivante

$$\mathbb{P}_{\Upsilon,\Gamma}\, \Phi_p^{-1} = \mathbb{Q}_{\Upsilon,\Gamma}.$$

Correspondance des lois

Théorème 1

Pour tout Υ et $\Gamma \in (0, +\infty)$ (y compris le cas $\Gamma = +\infty$ quand $\lambda < \mu$), nous avons la représentation suivante

$$\mathbb{P}_{\Upsilon,\Gamma}\, \Phi_p^{-1} = \mathbb{Q}_{\Upsilon,\Gamma}.$$

Processus de branchement

Soit $(Z_t^m)_{t\geq 0}$ le processus de branchement à temps continu donnant la taille de la population à l'instant t des m arbres recouverts par le processus d'exploration.

Plan

Renormalisation

- On pose $m = [Nx]$, $x > 0$. Soit $(Z_t^{N,x})_{t\geq 0}$ le processus de branchement donnant la taille de la population constituée des $[Nx]$ arbres non binaires de taux de naissance $\lambda_N = N\sigma^2/2a + \alpha/a$ et de taux de mort $\mu_N = N\sigma^2/2 + \beta$, avec $0 < \beta < \alpha$ et $\sigma > 0$. On pose

$$X_t^{N,x} = \frac{1}{N} Z_t^{N,x}.$$

- Soit $H^{N,\Gamma}$ le processus d'exploration associé à $\{Z_t^{N,x}, 0 \leq t \leq \Gamma\}$ de pentes $\pm 2N$ et λ, μ remplacé par λ_N, μ_N.

Renormalisation

- On définit également le temps local de $H^{N,\Gamma}$ au niveau t à l'instant s par :

$$L_s^{N,\Gamma}(t) = \frac{4}{\kappa^2\delta} \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mathbf{1}_{\{t \leq H_r^{N,\Gamma} < t+\varepsilon\}} dr,$$

où $\delta = \frac{1}{2a}(a + a^2 + 2\zeta^2)$ et $\kappa^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(a + a^2 + \zeta^2)$.

  La motivation du facteur $4/\kappa^2\delta$ sera clair quand nous ferons tendre N vers l'infini.

- $L_s^{N,\Gamma}(t)$ est égale à $4/N\kappa^2\delta$ fois le nombre de paires de branches de $H^{N,\Gamma}$ qui coupent le niveau t entre les instants 0 et s.

Renormalisation

Soit $\tau_x^{N,\Gamma}$ le temps pour explorer la forêt $\Im_{N,x}$,

$$\tau_x^{N,\Gamma} = \inf\left\{ s > 0 :\ L_s^{N,\Gamma}(0) > \frac{4}{\kappa^2\delta}\frac{[Nx]}{N} \right\}.$$

On a déduit la représentation discrète de Ray-Knight suivante

Lemme 1

$$\left\{ L^{N,\Gamma}_{\tau_x^{N,\Gamma}}(t),\ 0 \le t \le \Gamma,\ x > 0 \right\} \overset{(d)}{=} \left\{ \frac{4}{\kappa^2\delta} X_t^{N,x},\ 0 \le t \le \Gamma,\ x > 0 \right\}.$$

Renormalisation

Soit $\tau_x^{N,\Gamma}$ le temps pour explorer la forêt $\Im_{N,x}$,

$$\tau_x^{N,\Gamma} = \inf\left\{ s > 0 : \; L_s^{N,\Gamma}(0) > \frac{4}{\kappa^2\delta}\frac{[Nx]}{N} \right\}.$$

On a déduit la représentation discrète de Ray-Knight suivante

Lemme 1

$$\left\{ L^{N,\Gamma}_{\tau_x^{N,\Gamma}}(t), \; 0 \leq t \leq \Gamma, \; x > 0 \right\} \stackrel{(d)}{=} \left\{ \frac{4}{\kappa^2\delta} X_t^{N,x}, \; 0 \leq t \leq \Gamma, \; x > 0 \right\}.$$

Plan

Convergence dans D

Considérons une suite $\{X_t^n, t \geq 0\}_{n \geq 1}$ de semi-martingales unidimensionelles, qui est telle que pour tout $n \geq 1$,

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t \varphi_n(X_s^n) ds + M_t^n, 0 \leqslant t \leqslant T;$$

$$\langle M^n \rangle_t = \int_0^t \psi_n(X_s^n) ds, t \geq 0;$$

où pour tout $n \geq 1$, M^n est une martingale locale de carré intégrable , φ_n et ψ_n sont des fonctions boreliennes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement.

Critère de tension dans D

Proposition 1

Une condition suffisante pour que la suite de semi-martingales $\{X_t^n, t \geq 0\}_{n\geq 1}$ soit tendue dans $D([0,\infty))$ est :
- la suite de v.a $\{X_0^n, n \geq 1\}$ est tendue ;
- pour tout $T > 0$, il existe un $p > 1$,

$$\textit{La suite de v.a} \left\{ \int_0^T [|\varphi_n(X_s^n)| + \psi_n(X_t^n)]^p dt, n \geq 1 \right\} \textit{ est tendue.}$$

Si de plus, pour tout $T > 0$, quand $n \longrightarrow \infty$,

$$\sup_{0\leq t\leq T} |M_t^n - M_{t-}^n| \longrightarrow 0 \textit{ en probabilite},$$

alors toute limite X d'une sous suite convergente de la suite $\{X^n\}_{n\geq 1}$ est p.s. continue.

Critère de tension dans D

Proposition 1

Une condition suffisante pour que la suite de semi-martingales $\{X_t^n, t \geq 0\}_{n\geq 1}$ soit tendue dans $D([0,\infty))$ est :
• la suite de v.a $\{X_0^n, n \geq 1\}$ est tendue ;
• pour tout $T > 0$, il existe un $p > 1$,

$$\textit{La suite de v.a} \left\{ \int_0^T [|\varphi_n(X_s^n)| + \psi_n(X_t^n)]^p dt, n \geq 1 \right\} \textit{est tendue.}$$

Si de plus, pour tout $T > 0$, quand $n \longrightarrow \infty$,

$$\sup_{0\leq t\leq T} |M_t^n - M_{t-}^n| \longrightarrow 0 \textit{ en probabilite},$$

alors toute limite X d'une sous suite convergente de la suite $\{X^n\}_{n\geq 1}$ est p.s. continue.

Dynamique de $H^{N,\Gamma}$ normalisé

$$H_s^{N,\Gamma} = 2N \int_0^s V_r^N dr, \quad H_0^{N,\Gamma} = 0, \quad V_0^N = 1,$$

$$\begin{aligned} V_s^N &= 1 + 2\int_0^s \mathbf{1}_{\{V_{r-}^N = -1\}} dP_r^{N,+} - 2\int_0^s \mathbf{1}_{\{V_{r-}^N = +1\}} dP_r^{N,-} \\ &+ \frac{\kappa^2 \delta N}{2}\left(L_s^{N,\Gamma}(0) - L_{0^+}^{N,\Gamma}(0)\right) - \frac{\kappa^2 \delta N}{2} L_s^{N,\Gamma}(\Gamma^-) \\ &+ 2N \sum_{k>0, S_k^{N,+} \le s} \left(\frac{\kappa^2 \delta}{4}\left(L_s^{N,\Gamma}(H_{S_k^{N,+}}^{N,\Gamma}) - L_{S_k^{N,+}}^{N,\Gamma}(H_{S_k^{N,+}}^{N,\Gamma})\right)\right) \wedge \frac{(\Theta_k - 1)}{N} \end{aligned}$$

où $\{P_s^{N,+}, s \ge 0\}$ et $\{P_s^{N,-}, s \ge 0\}$ sont des processus de Poisson mutuellement indépendantes d'intensités respectives $a^{-1}\delta(N^2\kappa^2 + 2N\alpha)$ et $\delta(N^2\kappa^2 + 2N\beta)$.

Résultat utile pour la convergence de $H^{N,\Gamma}$

- Considérons le processus de branchement $(Z_t^N)_{t\geq 0}$ donnant la taille de la population à l'instant t constituée d'un unique ancètre de taux de naissance λ_N et de taux de mort μ_N, dont la progéniture est tuée au temps $t = \Gamma$.
- On définit la longueur de l'arbre généalogique par

$$S_N^\Gamma = \int_0^\Gamma Z_t^N dt.$$

Résultat utile pour la convergence de $H^{N,\Gamma}$

- Puisque tout au long de cet arbre les naissances arrivent au taux λ_N, alors le nombre total de descendants nés avant l'instant t, noté par Λ_N^Γ, vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\Lambda_N^\Gamma \middle| S_N^\Gamma\right) = \lambda_N S_N^\Gamma.$$

et ainsi nous avons

Lemme 2

Pour tout $\Gamma > 0$, il existe $C(\Gamma)$ tel que

$$\mathbb{E}(\Lambda_N^\Gamma) \leqslant C(\Gamma) N.$$

Résultat utile pour la convergence de $H^{N,\Gamma}$

- Puisque tout au long de cet arbre les naissances arrivent au taux λ_N, alors le nombre total de descendants nés avant l'instant t, noté par Λ_N^Γ, vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\Lambda_N^\Gamma \middle| S_N^\Gamma\right) = \lambda_N S_N^\Gamma.$$

et ainsi nous avons

Lemme 2

Pour tout $\Gamma > 0$, il existe $C(\Gamma)$ tel que

$$\mathbb{E}(\Lambda_N^\Gamma) \leqslant C(\Gamma)N.$$

Résultats principaux

Théorème 2

(1) $X^{N,x} \Longrightarrow X^x$ où X^x vérifie

$$X_t^x = x + (\alpha - \beta)\int_0^t X_s^x ds + \kappa \int_0^t \sqrt{X_s^x} dW_s, \quad t \geq 0.$$

(2) $H^{N,\Gamma} \Longrightarrow H^\Gamma$ dans $\mathcal{C}([0,\infty))$ où H^Γ vérifie

$$H_s^\Gamma = \frac{2(\alpha-\beta)}{\kappa^2} s + \frac{2}{\kappa} B_s + \frac{1}{2} L_s^\Gamma(0) - \frac{1}{2} L_s^\Gamma(\Gamma^-), \quad s \geq 0.$$

(3) $H^N \Longrightarrow H$ dans $\mathcal{C}([0,\infty))$ où H vérifie

$$H_s = \frac{2(\alpha-\beta)}{\kappa^2} s + \frac{2}{\kappa} B_s + \frac{1}{2} L_s(0), \quad s \geq 0.$$

Résultats principaux

Théorème 2

(1) $X^{N,x} \Longrightarrow X^x$ où X^x vérifie

$$X_t^x = x + (\alpha - \beta)\int_0^t X_s^x ds + \kappa \int_0^t \sqrt{X_s^x} dW_s, \quad t \geq 0.$$

(2) $H^{N,\Gamma} \Longrightarrow H^\Gamma$ dans $\mathcal{C}([0,\infty))$ où H^Γ vérifie

$$H_s^\Gamma = \frac{2(\alpha - \beta)}{\kappa^2} s + \frac{2}{\kappa} B_s + \frac{1}{2} L_s^\Gamma(0) - \frac{1}{2} L_s^\Gamma(\Gamma^-), \quad s \geq 0.$$

(3) $H^N \Longrightarrow H$ dans $\mathcal{C}([0,\infty))$ où H vérifie

$$H_s = \frac{2(\alpha - \beta)}{\kappa^2} s + \frac{2}{\kappa} B_s + \frac{1}{2} L_s(0), \quad s \geq 0.$$

Extension du théorème de Ray Knight

$$\tau_x = \inf\left\{ s > 0 : \; L_s(0) > \frac{4}{\kappa^2\delta} x \right\}.$$

Proposition

$$\{L_{\tau_x}(t),\; t \geq 0,\; x > 0\} \stackrel{(d)}{=} \left\{ \frac{4}{\kappa^2\delta} X_t^x,\; t \geq 0,\; x > 0 \right\},$$

où X^x est la diffusion de Feller , solution de l'EDS

$$X_t^x = x + (\alpha - \beta) \int_0^t X_s^x ds + \kappa \int_0^t \sqrt{X_s^x} dW_s, \quad t \geq 0.$$

Extension du théorème de Ray Knight

$$\tau_x = \inf\left\{ s > 0 : \; L_s(0) > \frac{4}{\kappa^2 \delta} x \right\}.$$

Proposition

$$\{L_{\tau_x}(t), \; t \geq 0, \; x > 0\} \overset{(d)}{=} \left\{ \frac{4}{\kappa^2 \delta} X_t^x, \; t \geq 0, \; x > 0 \right\},$$

où X^x est la diffusion de Feller , solution de l'EDS

$$X_t^x = x + (\alpha - \beta) \int_0^t X_s^x ds + \kappa \int_0^t \sqrt{X_s^x} dW_s, \quad t \geq 0.$$

Bibliographie

- Aldous, D. (1991). The continuum random tree. I. The Annals of Probability, pages 1–28.
- Ba, M., Pardoux, E. and Sow, A. B. (2012). Binary trees, exploration processes, and an extended ray-knight theorem. Journal of Applied Probability, 49(1) :210–225.
- Billingsley, P. (1995). Probability and Measure, 3nd edn. John Wiley, New York.
- Billingsley, P. (1999). Convergence of Probability Measures, 2nd edn. John Wiley, New York.
- Delmas, J.-F. (2008). Height process for super-critical continuous state branching process. Markov Process. Relat. Fields 14, 309-326.

Bibliographie

- Grimvall, A. (1974). On the convergence of sequences of branching processes. The Annals of Probability, pages 1027–1045.
- Joffe, A. and Métivier, M. (1986). Weak convergence of sequences of semimartingales with applications to multitype branching processes. Advances in Applied Probability, pages 20–65.
- Le, V., Pardoux, E. and Wakolbinger, A. (2013). “Trees under attack” : a Ray–Knight representation of Feller’s branching diffusion with logistic growth. Probability Theory and Related Fields, 155 (3-4) : 583–619.
- Protter, P. E. (2004). Stochastic Integration and Differential Equations : Version 2.1, volume 21. Springer.

Merci pour votre aimable attention !