Déviations modérées dans l'estimation des paramètres d'un modèle de Heston

Marie du Roy de Chaumaray

Institut de Mathématiques de Bordeaux

JPS, 18 Avril 2016

1 Le processus CIR

2 Modèle de Heston

3 Déviations modérées : entre TCL et PGD

4 PDM pour Heston

Le processus CIR est la solution forte de l'EDS :

$$\mathrm{d}X_t = (a + bX_t)\,\mathrm{d}t + 2\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}B_t$$

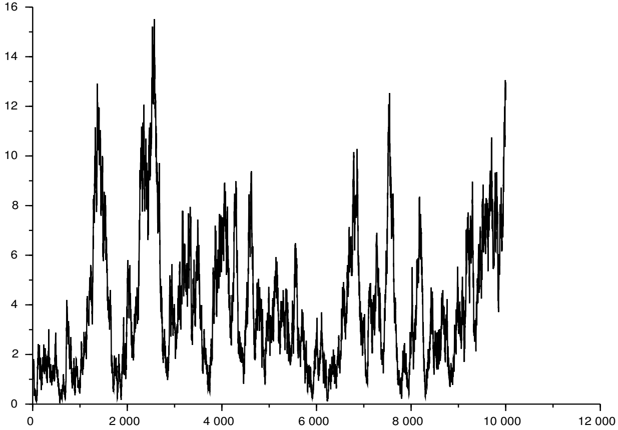
où

- $a \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$: paramètres inconnus à estimer
- le bruit $(B_t)_t$ est un mouvement brownien standard
- le point de départ $X_0 = x \geq 0$.

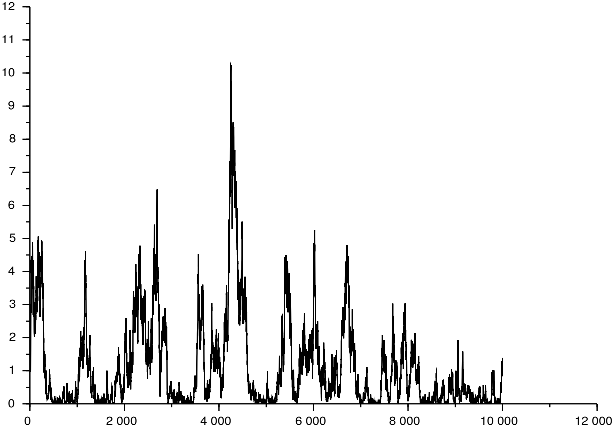
On suppose ici :

- $b < 0 \rightsquigarrow$ le processus est ergodique
- $a > 2 \rightsquigarrow$ le processus n'atteint jamais 0.

Une trajectoire pour $a = 4$ et $b = -1$



Une trajectoire pour $a = 1$ et $b = -1$



1. Le processus CIR
2. Modèle de Heston
3. Déviations modérées : entre TCL et PGD
4. PDM pour Heston

On considère la solution forte du système suivant

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = (a + bX_t)\,\mathrm{d}t + 2\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}B_t \\ \mathrm{d}Y_t = (c + dX_t)\,\mathrm{d}t + 2\sqrt{X_t}\,\left(\rho\,\mathrm{d}B_t + \sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}W_t\right) \end{cases} \tag{1}$$

où

- $a > 0$, $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$: paramètres à estimer
- (B_t, W_t) brownien standard
- $\rho \in]-1, 1[$.

Estimateurs du maximum de vraisemblance

$$\widehat{\theta}_T = \begin{pmatrix} \widehat{a}_T \\ \widehat{b}_T \\ \widehat{c}_T \\ \widehat{d}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + 2T \begin{pmatrix} \langle M \rangle_T^{-1} & 0 \\ 0 & \langle M \rangle_T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_T \\ N_T \end{pmatrix},$$

où M_T et N_T sont des martingale données par

$$M_T = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^T X_t^{-1/2}\,\mathrm{d}B_t \\ \displaystyle\int_0^T X_t^{1/2}\,\mathrm{d}B_t \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad N_T = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^T X_t^{-1/2}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_t \\ \displaystyle\int_0^T X_t^{1/2}\,\mathrm{d}\widetilde{B}_t \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{d}\widetilde{B}_t = \rho\,\mathrm{d}B_t + \sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}W_t$

1 Le processus CIR

2 Modèle de Heston

3 Déviations modérées : entre TCL et PGD

4 PDM pour Heston

Soient $(v_T)_T$ une vitesse (suite réelle positive croissant vers l'infini) et $(M_T)_T$ une suite de variables aléatoires de $\mathbb{R}^d$.

- LGN : $\frac{M_T}{v_T} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$
- TCL : $\frac{M_T}{\sqrt{v_T}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Et ensuite ??

Soient $(v_T)_T$ une vitesse (suite réelle positive croissant vers l'infini) et $(M_T)_T$ une suite de variables aléatoires de $\mathbb{R}^d$.

- LGN : $\frac{M_T}{v_T} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$
- TCL : $\frac{M_T}{\sqrt{v_T}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Et ensuite ?? $\rightsquigarrow$ PGD pour $\frac{M_T}{v_T}$.

Principe de Grandes Déviations

Une suite $(Z_T)_T$ de v.a.r satisfait un PGD de vitesse v_T avec pour fonction de taux I si I une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$ semi-continue inférieurement qui vérifie :

- borne supérieure : pour tout fermé F de $\mathbb{R}^d$

$$\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{v_T} \log \mathbb{P}\left(Z_T \in F\right) \leq - \inf_{z \in F} I\left(z\right)$$

- borne inférieure : pour tout ouvert G de $\mathbb{R}^d$

$$\liminf_{T \to +\infty} \frac{1}{v_T} \log \mathbb{P}\left(Z_T \in G\right) \geq - \inf_{z \in G} I\left(z\right)$$

Parfois

- I dure à manipuler
- I pas explicite
- PGD n'existe pas

Parfois

- I dure à manipuler
- I pas explicite
- PGD n'existe pas

Alors on cherche à établir un PDM :

Principe de déviations modérées

Soit a_T une vitesse telle que $a_T = o\left(v_T\right)$. La suite $\frac{M_T}{v_T}$ satisfait un PDM si la suite $\frac{M_T}{\sqrt{a_T v_T}}$ satisfait un PGD de vitesse a_T.

En résumé, on cherche des équivalents exponentiellement petits de

- $\mathbb{P}\left(\frac{\|M_T\|}{v_t} \geq r\right)$ PGD
- $\mathbb{P}\left(\frac{\|M_T\|}{v_t} \geq \frac{r}{\sqrt{v_T}}\right)$ TCL
- $\mathbb{P}\left(\frac{\|M_T\|}{v_t} \geq r\sqrt{\frac{a_T}{v_T}}\right)$ PDM

1. Le processus CIR
2. Modèle de Heston
3. Déviations modérées : entre TCL et PGD
4. PDM pour Heston

Soit $(\lambda_T)_T$ une suite réelle positive telle que pour T tendant vers l'infini

$$\lambda_T \to +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_T}{\sqrt{T}} \to 0, \tag{2}$$

on établit un PGD pour $\sqrt{\frac{T}{\lambda_T}}(\widehat{\theta}_T - \theta)$ de vitesse λ_T.

Soit $(\lambda_T)_T$ une suite réelle positive telle que pour T tendant vers l'infini

$$\lambda_T \to +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_T}{\sqrt{T}} \to 0, \qquad (2)$$

on établit un PGD pour $\sqrt{\frac{T}{\lambda_T}}(\widehat{\theta}_T - \theta)$ de vitesse λ_T.

PDM pour le CIR

$\sqrt{\frac{T}{\lambda_T}}\left(\widehat{a}_T - a, \widehat{b}_T - b\right)$ satisfait un PGD de vitesse λ_T de fonction de taux $I_{a,b}$ donnée pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ par

$$I_{a,b}(\alpha, \beta) = -\frac{b}{8(a-2)}\alpha^2 - \frac{a}{8b}\beta^2 + \frac{\alpha\beta}{4}.$$

PDM pour le modèle de Heston

$\sqrt{\frac{T}{\lambda_T}}\left(\widehat{\theta}_T - \theta\right)$ satisfait un PGD de vitesse λ_T et de fonction de taux I_θ donnée pour tout $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ par

$$I_\theta(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(1 - \rho^2\right)^{-1} \left(I_{a,b}\left(\alpha, \beta\right) + I_{a,b}\left(\gamma, \delta\right) + \rho\, J\left(\alpha, \beta, \gamma, \delta\right)\right).$$

où $I_{a,b}$ est la fonction de taux précédente et

$$J\left(\alpha, \beta, \gamma, \delta\right) = -\alpha\delta + \frac{b}{a-2}\alpha\gamma - \beta\gamma + \frac{a}{b}\beta\delta.$$