Quelques problèmes sur les systèmes de fonctions itérées

Blandine DUBARRY
sous la direction de Dimitri PETRITIS

Institut de recherche mathématique de Rennes

Les Houches, 18 avril 2016

SYSTÈMES DE FONCTIONS ITÉRÉES
(ITERATED FUNCTIONS SYSTEMS)

LES DÉTERMINISTES

LES PROBABILISTES

SYSTÈMES DE FONCTIONS ITÉRÉES
(ITERATED FUNCTIONS SYSTEMS)

LES DÉTERMINISTES

LES PROBABILISTES

X espace métrique complet
$S_i : X \longrightarrow X$ contractions
IFS : $\mathcal{S} = \{S_0, \ldots, S_{D-1}\}$

$$F(A) = \bigcup_i S_i(A), \ A \text{ compact}$$

SYSTÈMES DE FONCTIONS ITÉRÉES (ITERATED FUNCTIONS SYSTEMS)

LES DÉTERMINISTES

LES PROBABILISTES

X espace métrique complet
$S_i : X \longrightarrow X$ contractions
IFS : $\mathcal{S} = \{S_0, \ldots, S_{D-1}\}$

$$F(A) = \bigcup_i S_i(A), \; A \text{ compact}$$

Hutchinson ('81) :

- $\lim F^n(A)$ existe,
- indépendante du compact A,
- ensemble fractal Λ.

SYSTÈMES DE FONCTIONS ITÉRÉES (ITERATED FUNCTIONS SYSTEMS)

LES DÉTERMINISTES

X espace métrique complet
$S_i : X \longrightarrow X$ contractions
IFS : $\mathcal{S} = \{S_0, \ldots, S_{D-1}\}$

$$F(A) = \bigcup_i S_i(A), \ A \text{ compact}$$

Hutchinson ('81) :

- $\lim F^n(A)$ existe,
- indépendante du compact A,
- ensemble fractal Λ.

LES PROBABILISTES

IFS : $\mathcal{S} = \{(S_i, p_i), i = 0, \ldots, D-1\}$
p_i probabilité constante de choisir S_i

IFS $\leftrightarrow$ opérateur de Markov P sur l'espace des mesures boréliennes

$$\mu P = \sum p_i \mu \circ S_i^{-1}$$

SYSTÈMES DE FONCTIONS ITÉRÉES (ITERATED FUNCTIONS SYSTEMS)

LES DÉTERMINISTES

X espace métrique complet
$S_i : X \longrightarrow X$ contractions
IFS : $\mathcal{S} = \{S_0, \ldots, S_{D-1}\}$

$$F(A) = \bigcup_i S_i(A), \ A \text{ compact}$$

Hutchinson ('81) :

- $\lim F^n(A)$ existe,
- indépendante du compact A,
- ensemble fractal Λ.

LES PROBABILISTES

IFS : $\mathcal{S} = \{(S_i, p_i), i = 0, \ldots, D-1\}$
p_i probabilité constante de choisir S_i

IFS $\leftrightarrow$ opérateur de Markov P sur l'espace des mesures boréliennes

$$\mu P = \sum p_i \mu \circ S_i^{-1}$$

Hutchinson ('81) : Si les $p_i \in]0, 1[$,

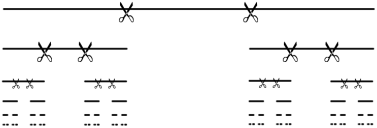
- $\exists!$ mesure invariante $\overline{\mu}$,
- $\mathrm{supp}(\overline{\mu}) = \Lambda$ ensemble fractal.

Qu'est-ce qu'une fractale ?

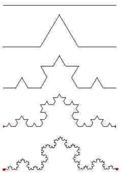
Une fractale est un ensemble autosimilaire (elle est composée de copies réduites d'elle-même).

Une fractale est un ensemble autosimilaire (elle est composée de copies réduites d'elle-même).

Ensemble tri-adique de Cantor



Courbe de von Koch



Dimension de Hausdorff

Soient $s \geq 0$ et $\delta > 0$. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (diam(U_i))^s \middle| (U_i)_{i \in \mathbb{N}} \ \delta - \text{recouvrement de F} \right\} \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

Dimension de Hausdorff

Soient $s \geq 0$ et $\delta > 0$. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (diam(U_i))^s \middle| (U_i)_{i \in \mathbb{N}} \ \delta - \text{recouvrement de F} \right\} \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

Mesure s-dimensionnelle de Hausdorff

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Dimension de Hausdorff

Soient $s \geq 0$ et $\delta > 0$. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} (diam(U_i))^s \middle| (U_i)_{i\in\mathbb{N}}\ \delta - \text{recouvrement de F} \right\} \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

Mesure s-dimensionnelle de Hausdorff

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

Dimension de Hausdorff : Théorème-Définition

Pour tout $F \subset \mathbb{R}^n$, il existe un unique $s_0 \geq 0$ tel que

$\forall s < s_0,\ \mathcal{H}^s(F) = \infty,$

$\forall s > s_0,\ \mathcal{H}^s(F) = 0.$

La dimension de Hausdorff de F est s_0.

IFSs AVEC PROBABILITÉS CONSTANTES
Hutchinson (1981) - Barnsley (1988)

$\rightarrow$ Existence et unicité de la mesure invariante $\overline{\mu}$

- $\hookrightarrow$ S_i contractions avec $Lip(S_i) = r_i < 1$,
- $\hookrightarrow$ p_i constantes telles que $p_i \in]0, 1[$.

IFSs AVEC PROBABILITÉS CONSTANTES
Hutchinson (1981) - Barnsley (1988)

$\rightarrow$ Existence et unicité de la mesure invariante $\overline{\mu}$

- $\hookrightarrow$ S_i contractions avec $Lip(S_i) = r_i < 1$,
- $\hookrightarrow$ p_i constantes telles que $p_i \in]0,1[$.

$\rightarrow$ Dimension de Hausdorff

- $\hookrightarrow$ sous de bonnes hypothèses, $dim(\overline{\mu}) = s_0$ tel que $\sum_{i=0}^{D-1} r_i^{s_0} = 1$.

IFSs AVEC PROBABILITÉS CONTINUES "PLACE-DEPENDENT"
Barnsley et al.(1988) - Lasota and Yorke (1994) - Szarek (1990s-2000s) -

$\rightarrow$ Existence et unicité de la mesure invariante $\overline{\mu}$

- $\hookrightarrow$ S_i fonctions lipschitziennes,
- $\hookrightarrow$ p_i lipschitziennes, α-holdériennes, Dini-continues.

IFSs AVEC PROBABILITÉS CONTINUES "PLACE-DEPENDENT"

Barnsley et al.(1988) - Lasota and Yorke (1994) - Szarek (1990s-2000s) - Jaroszewska (2002)

$\rightarrow$ Existence et unicité de la mesure invariante $\overline{\mu}$

- $\hookrightarrow$ S_i fonctions lipschitziennes,
- $\hookrightarrow$ p_i lipschitziennes, α-holdériennes, Dini-continues.

$\rightarrow$ Existence et non unicité de la mesure invariante $\overline{\mu}$

- $\hookrightarrow$ S_i contractions,
- $\hookrightarrow$ p_i continues et strictement positives.

IFSs AVEC PROBABILITÉS CONTINUES "PLACE-DEPENDENT"

Barnsley et al.(1988) - Lasota and Yorke (1994) - Szarek (1990s-2000s) - Jaroszewska (2002) - Jaroszewska and Rams (2008) - Bárány (2014)

$\rightarrow$ Existence et unicité de la mesure invariante $\overline{\mu}$

- $\hookrightarrow$ S_i fonctions lipschitziennes,
- $\hookrightarrow$ p_i lipschitziennes, α-holdériennes, Dini-continues.

$\rightarrow$ Existence et non unicité de la mesure invariante $\overline{\mu}$

- $\hookrightarrow$ S_i contractions,
- $\hookrightarrow$ p_i continues et strictement positives.

$\rightarrow$ Dimension de Hausdorff

- $\hookrightarrow$ S_i contractions et un peu plus,
- $\hookrightarrow$ p_i α-holdériennes,

$$dim(\overline{\mu}) = \min\left\{\frac{h_\mu}{\chi_\mu}, 1\right\}$$

IFSs AVEC PROBABILITÉS CONSTANTES PAR MCX
"PLACE-DEPENDENT"
Jaroszewska (2013) -

$\rightarrow$ Existence et unicité de la mesure invariante $\overline{\mu}$ dans un cas particulier

IFSs AVEC PROBABILITÉS CONSTANTES PAR MCX "PLACE-DEPENDENT"

Jaroszewska (2013) - D. (en préparation)

$\rightarrow$ Existence et unicité de la mesure invariante $\overline{\mu}$ dans un cas particulier

$\rightarrow$ Extension des résultats à un cadre plus général et dimension de Hausdorff

Merci pour votre attention !