Martingales de valeur terminale donnée

Via les équations différentielles stochastiques rétrogrades

Jonathan Harter, en collaboration avec Marc Arnaudon et Adrien Richou

IMB Bordeaux

19 Avril 2016

1. Martingales sur les variétés

2. Formulation en terme d'EDSR

3. Résultats

Sommaire

1 Martingales sur les variétés

2 Formulation en terme d'EDSR

3 Résultats

Le Cadre

On se donne un espace probabilisé filtré à horizon fini $[0, T]$, $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\big)$, et :

1. une variété différentiable $\mathcal{M}$ de dimension finie (au moins $\geqslant 2$),
2. une variable aléatoire $\xi \in L^2(\Omega)$ dans $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$.

Problème – Peut-on trouver une $\mathcal{F}$-martingale M dans $\mathcal{M}$ telle que $M_T = \xi$? Et si oui, est-elle unique ?

Le Cadre

On se donne un espace probabilisé filtré à horizon fini $[0,T]$, $\big(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F})_{t\in[0,T]},\mathbb{P}\big)$, et :

1. une variété différentiable $\mathcal{M}$ de dimension finie (au moins $\geqslant 2$),
2. une variable aléatoire $\xi \in L^2(\Omega)$ dans $(\mathcal{M},\mathcal{B}(\mathcal{M}))$.

Problème – Peut-on trouver une $\mathcal{F}$-martingale M dans $\mathcal{M}$ telle que $M_T = \xi$? Et si oui, est-elle unique ?

Le Cadre

On se donne un espace probabilisé filtré à horizon fini $[0, T]$, $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\big)$, et :

1. une variété différentiable $\mathcal{M}$ de dimension finie (au moins $\geqslant 2$),
2. une variable aléatoire $\xi \in L^2(\Omega)$ dans $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$.

Problème – Peut-on trouver une $\mathcal{F}$-martingale M dans $\mathcal{M}$ telle que $M_T = \xi$? Et si oui, est-elle unique ?

Martingales sur $\mathcal{M}$

Définition Vectorielle dans $\mathbf{R}^d$– M est une $\mathcal{F}$-*martingale* si $M \in L^1(\Omega)$, M est adapté et vérifie pour tous $t \geqslant s$,

$$\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \text{ a.s.} \tag{2.1}$$

X est une $\mathcal{F}$-*semimartingale* si X s'écrit

$$X = X_0 + M + A,$$

où A est un processus à variations finies, M est une martingale locale.

Comment étendre sur une variété ?– fixer une carte globale $(x^i)_{i=1,\dots,d}$ et étendre (2.1) coordonnée par coordonnée ?

Problème $\rightsquigarrow$ non intrinsèque

Martingales sur $\mathcal{M}$

Définition Vectorielle dans $\mathbf{R}^d$– M est une $\mathcal{F}$-*martingale* si $M \in L^1(\Omega)$, M est adapté et vérifie pour tous $t \geqslant s$,

$$\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \text{ a.s.} \tag{2.1}$$

X est une $\mathcal{F}$-*semimartingale* si X s'écrit

$$X = X_0 + M + A,$$

où A est un processus à variations finies, M est une martingale locale.

Comment étendre sur une variété ?– fixer une carte globale $(x^i)_{i=1,\ldots,d}$ et étendre (2.1) coordonnée par coordonnée ?

Problème $\rightsquigarrow$ non intrinsèque

Martingales sur $\mathcal{M}$

Définition Vectorielle dans $\mathbf{R}^d$– M est une $\mathcal{F}$-*martingale* si $M \in L^1(\Omega)$, M est adapté et vérifie pour tous $t \geqslant s$,

$$\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \text{ a.s.} \tag{2.1}$$

X est une $\mathcal{F}$-*semimartingale* si X s'écrit

$$X = X_0 + M + A,$$

où A est un processus à variations finies, M est une martingale locale.

Comment étendre sur une variété ?– fixer une carte globale $(x^i)_{i=1,\ldots,d}$ et étendre (2.1) coordonnée par coordonnée ?

Problème $\rightsquigarrow$ non intrinsèque

Martingales sur $\mathcal{M}$

Définition Vectorielle dans $\mathbf{R}^d$– M est une $\mathcal{F}$-*martingale* si $M \in L^1(\Omega)$, M est adapté et vérifie pour tous $t \geqslant s$,

$$\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \text{ a.s.} \tag{2.1}$$

X est une $\mathcal{F}$-*semimartingale* si X s'écrit

$$X = X_0 + M + A,$$

où A est un processus à variations finies, M est une martingale locale.

Comment étendre sur une variété ?– fixer une carte globale $(x^i)_{i=1,\dots,d}$ et étendre (2.1) coordonnée par coordonnée ?

Problème $\rightsquigarrow$ non intrinsèque

Martingales sur $\mathcal{M}$

Solution – pour pallier à l'absence de structure vectorielle sur $\mathcal{M}$, on utilise la structure différentielle i.e. celle des **fonctions lisses** sur $\mathcal{M}$.

Ce qui permet de le faire :

la formule d'Itô !

Dans $\mathbf{R}^d$,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \mathrm{d}f(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \overbrace{\operatorname{Hess} f(X_s)(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s)}^{=D_{ij}f(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s}.$$

Formulation intrinsèque des semimartingales dans $\mathbf{R}^d$

$$X \text{ est une semimartingale} \iff$$

$$\forall f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}\right), \quad f(X) \text{ est une semimartingale réelle.}$$

Martingales sur $\mathcal{M}$

Solution – pour pallier à l'absence de structure vectorielle sur $\mathcal{M}$, on utilise la structure différentielle i.e. celle des **fonctions lisses** sur $\mathcal{M}$. Ce qui permet de le faire :

la formule d'Itô !

Dans $\mathbf{R}^d$,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \mathrm{d}f(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \overbrace{\operatorname{Hess} f(X_s)(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s)}^{=D_{ij}f(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^i, X^j\right\rangle_s}.$$

Formulation intrinsèque des semimartingales dans $\mathbf{R}^d$

$$X \text{ est une semimartingale} \iff$$

$$\forall f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}\right), \quad f(X) \text{ est une semimartingale réelle.}$$

Martingales sur $\mathcal{M}$

Solution – pour pallier à l'absence de structure vectorielle sur $\mathcal{M}$, on utilise la structure différentielle i.e. celle des **fonctions lisses** sur $\mathcal{M}$. Ce qui permet de le faire :

la formule d'Itô !

Dans $\mathbf{R}^d$,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \mathrm{d}f(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \overbrace{\mathrm{Hess}\, f(X_s)(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s)}^{= D_{ij} f(X_s)\,\mathrm{d}\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s}.$$

Formulation intrinsèque des semimartingales dans $\mathbf{R}^d$

X est une semimartingale $\Longleftrightarrow$

$$\forall f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}\right), \quad f(X) \text{ est une semimartingale réelle.}$$

Martingales sur $\mathcal{M}$

DEFINITION – 2.1 *X est une semimartingale sur $\mathcal{M}$ si pour toute fonction régulière $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$, $f(X)$ est une semimartingale réelle.*

En particulier, pour tout système de coordonnées globaux $x^i \circ X := X^i$ est une semimartingale réelle.

Comment récupérer maintenant les martingales locales ?– On continue à travailler sur la formule d'Itô : $\mathrm{d}X = \mathrm{d}M + \mathrm{d}A$.

Martingales sur $\mathcal{M}$

DEFINITION – 2.2 *X est une semimartingale sur $\mathcal{M}$ si pour toute fonction régulière $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$, $f(X)$ est une semimartingale réelle.*

En particulier, pour tout système de coordonnées globaux $x^i \circ X := X^i$ est une semimartingale réelle.

Comment récupérer maintenant les martingales locales ?– On continue à travailler sur la formule d'Itô : $\mathrm{d}X = \mathrm{d}M + \mathrm{d}A$.

X est une martingale locale

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}), \quad f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Hess} f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) \left(= \int_0^t \mathrm{d}f(X_s)\,\mathrm{d}M_s\right)$$

est une martingale locale réelle.

Martingales sur $\mathcal{M}$

$$X \text{ est une martingale locale}$$

$$\iff$$

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathbf{R}), \quad f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Hess} f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) \left(= \int_0^t \mathrm{d}f(X_s)\,\mathrm{d}M_s\right)$$

$$\text{est une martingale locale .}$$

Il nous faut donc :

1. une notion de Hessien noté Hess sur $\mathcal{M}$,
2. une notion de variation quadratique par rapport à Hess.

Martingales sur $\mathcal{M}$

$$X \text{ est une martingale locale}$$

$$\iff$$

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathbf{R}), \quad f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Hess} f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) \left(= \int_0^t \mathrm{d}f(X_s)\,\mathrm{d}M_s \right)$$

$$\text{est une martingale locale .}$$

Il nous faut donc :

1. une notion de Hessien noté Hess sur $\mathcal{M}$,
2. une notion de variation quadratique par rapport à Hess.

Martingales sur $\mathcal{M}$

$$X \text{ est une martingale locale}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathbf{R}), \quad f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Hess} f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) \left(= \int_0^t \mathrm{d}f(X_s)\,\mathrm{d}M_s \right)$$

est une martingale locale .

Il nous faut donc :

1. une notion de Hessien noté Hess sur $\mathcal{M}$,
2. une notion de variation quadratique par rapport à Hess.

Hessien sur $\mathcal{M}$

En géométrie, un champ de tenseurs de type $(0,2)$ donné par

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = \nabla_X \, \mathrm{d}f(Y),$$

où ∇ est une dérivée covariante sur $\mathcal{M}$.
En chaque point $x \in \mathcal{M}$, une forme bilinéaire symétrique sur $T_x\mathcal{M}$:

$$(X,Y) \mapsto \operatorname{Hess} f(x)(X,Y).$$

En coordonnées locales,

$$(\operatorname{Hess} f)_{i,j}(x) = D_{i,j} f(x) - \Gamma^k_{i,j}(x) D_k f(x).$$

Plus généralement, on peut définir $\int b(\mathrm{d}X, \mathrm{d}X)$ pour toute forme bilinéaire b sur $\mathcal{M}$

Hessien sur $\mathcal{M}$

En géométrie, un champ de tenseurs de type $(0, 2)$ donné par

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = \nabla_X \, \mathrm{d}f(Y),$$

où ∇ est une dérivée covariante sur $\mathcal{M}$.
En chaque point $x \in \mathcal{M}$, une forme bilinéaire symétrique sur $T_x\mathcal{M}$:

$$(X, Y) \mapsto \operatorname{Hess} f(x)(X, Y).$$

En coordonnées locales,

$$(\operatorname{Hess} f)_{i,j}(x) = D_{i,j} f(x) - \Gamma^k_{i,j}(x) D_k f(x).$$

Plus généralement, on peut définir $\int b(\mathrm{d}X, \mathrm{d}X)$ pour toute forme bilinéaire b sur $\mathcal{M}$

Hessien sur $\mathcal{M}$

En géométrie, un champ de tenseurs de type $(0, 2)$ donné par

$$\text{Hess}\, f(X, Y) = \nabla_X \, \mathrm{d}f(Y),$$

où ∇ est une dérivée covariante sur $\mathcal{M}$.
En chaque point $x \in \mathcal{M}$, une forme bilinéaire symétrique sur $T_x\mathcal{M}$:

$$(X, Y) \mapsto \text{Hess}\, f(x)(X, Y).$$

En coordonnées locales,

$$(\text{Hess}\, f)_{i,j}(x) = D_{i,j} f(x) - \Gamma^k_{i,j}(x) D_k f(x).$$

Plus généralement, on peut définir $\int b(\mathrm{d}X, \mathrm{d}X)$ pour toute forme bilinéaire b sur $\mathcal{M}$

Hessien sur $\mathcal{M}$

En géométrie, un champ de tenseurs de type $(0,2)$ donné par

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = \nabla_X \, \mathrm{d}f(Y),$$

où ∇ est une dérivée covariante sur $\mathcal{M}$.
En chaque point $x \in \mathcal{M}$, une forme bilinéaire symétrique sur $T_x\mathcal{M}$:

$$(X,Y) \mapsto \operatorname{Hess} f(x)(X,Y).$$

En coordonnées locales,

$$(\operatorname{Hess} f)_{i,j}(x) = D_{i,j} f(x) - \Gamma^k_{i,j}(x) D_k f(x).$$

Plus généralement, on peut définir $\int b(\mathrm{d}X, \mathrm{d}X)$ pour toute forme bilinéaire b sur $\mathcal{M}$

Variation quadratique généralisée

Principe de construction–

- considérer un plongement $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ de $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{R}^d$,
- b s'écrit $b = b_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$,
- poser

$$\int_0^{\cdot} b(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) := \sum_i \int_0^{\cdot} b_{ij}(X_s)\,\mathrm{d}\underbrace{\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s}_{\text{variation quadratique réelle}}$$

- quantité indépendante du plongement.

Si $\mathcal{M} = \mathbf{R}$, $b(x,y) = xy$: variation quadratique habituelle.

Variation quadratique généralisée

Principe de construction–

- considérer un plongement $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{R}^d$,
- b s'écrit $b = b_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$,
- poser

$$\int_0^\cdot b(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) := \sum_i \int_0^\cdot b_{ij}(X_s)\,\mathrm{d}\underbrace{\left\langle X^i, X^j\right\rangle_s}_{\text{variation quadratique réelle}}$$

- quantité indépendante du plongement.

Si $\mathcal{M} = \mathbf{R}$, $b(x,y) = xy$: variation quadratique habituelle.

Variation quadratique généralisée

Principe de construction–

- considérer un plongement $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{R}^d$,
- b s'écrit $b = b_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$,
- poser

$$\int_0^{\cdot} b(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) := \sum_i \int_0^{\cdot} b_{ij}(X_s)\,\mathrm{d}\underbrace{\langle X^i, X^j\rangle_s}_{\text{variation quadratique réelle}}$$

- quantité indépendante du plongement.

Si $\mathcal{M} = \mathbf{R}$, $b(x,y) = xy$: variation quadratique habituelle.

Variation quadratique généralisée

Principe de construction–

- considérer un plongement $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{R}^d$,
- b s'écrit $b = b_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$,
- poser

$$\int_0^{\cdot} b(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s) := \sum_i \int_0^{\cdot} b_{ij}(X_s)\,\mathrm{d}\underbrace{\left\langle X^i, X^j\right\rangle_s}_{\text{variation quadratique réelle}}$$

- quantité indépendante du plongement.

Si $\mathcal{M} = \mathbf{R}$, $b(x,y) = xy$: variation quadratique habituelle.

Variation quadratique généralisée

X une semimartingale sur $\mathcal{M}$.

PROPOSITION – 2.1 *Il existe une unique application* $b \mapsto \int b(\mathrm{d}X, \mathrm{d}X)$*, des formes bilinéaires sur* $\mathcal{M}$ *dans l'ensemble des processus réels à variations finies t.q.*

1. *Associativité–*

$$\int (fb)(\mathrm{d}X, \mathrm{d}X) = \int f(X)\,\mathrm{d}\left(\int b(\mathrm{d}X, \mathrm{d}X)\right).$$

2. *Tensorisation–*

$$\int (\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g)\,(\mathrm{d}X, \mathrm{d}X) = \langle f \circ X, g \circ X \rangle\,.$$

Martingales sur $\mathcal{M}$

DEFINITION – 2.3 *X est une ∇-martingale sur $\mathcal{M}$ si*

$$\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R}), \quad f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Hess} f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s)$$

est une martingale locale réelle.

Analogue des martingales **locales** dans $\mathbf{R}^d$.

Pour plus de détails sur le calcul stochastique dans les variétés :[3], [2].

Martingales sur $\mathcal{M}$

DEFINITION – 2.4 *X est une ∇-martingale sur $\mathcal{M}$ si*

$$\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R}), \quad f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Hess} f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s)$$

est une martingale locale réelle.

Analogue des martingales **locales** dans $\mathbf{R}^d$.

Pour plus de détails sur le calcul stochastique dans les variétés :[3], [2].

Martingales sur $\mathcal{M}$

DEFINITION – 2.5 *X est une ∇-martingale sur $\mathcal{M}$ si*

$$\forall f \in \mathcal{C}^2\left(\mathcal{M}, \mathbf{R}\right), \quad f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Hess}\, f(\mathrm{d}X_s, \mathrm{d}X_s)$$

est une martingale locale réelle.

Analogue des martingales **locales** dans $\mathbf{R}^d$.

Pour plus de détails sur le calcul stochastique dans les variétés :[3], [2].

Sommaire

1. Martingales sur les variétés
2. Formulation en terme d'EDSR
3. Résultats

Généralités sur les EDSR

Valeur terminale ξ fixée.

DEFINITION – 3.1 *On appelle EDSR sur $\mathbf{R}^d$ toute équation différentielle stochastique de la forme*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.1}$$

où $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k} \to \mathbf{R}^d$ est une fonction aléatoire.
Une solution : (Y, Z), processus dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k}$ tel que (Y, Z) soit solution de (3.1) et

- Y,Z sont progressivement mesurables
- $\int_0^T \left(|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right) \mathrm{d}s < \infty$

Généralités sur les EDSR

Valeur terminale ξ fixée.

Definition – 3.2 *On appelle EDSR sur $\mathbf{R}^d$ toute équation différentielle stochastique de la forme*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.1}$$

où $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k} \to \mathbf{R}^d$ est une fonction aléatoire.
Une solution : (Y, Z), processus dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k}$ tel que (Y, Z) soit solution de (3.1) et

- Y,Z sont progressivement mesurables
- $\int_0^T \left(|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right) \mathrm{d}s < \infty$

Généralités sur les EDSR

Valeur terminale ξ fixée.

DEFINITION – 3.3 *On appelle EDSR sur* $\mathbf{R}^d$ *toute équation différentielle stochastique de la forme*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.1}$$

où $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k} \to \mathbf{R}^d$ est une fonction aléatoire.
Une solution : (Y, Z), processus dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d\times k}$ tel que (Y, Z) soit solution de (3.1) et

- Y,Z sont progressivement mesurables
- $\int_0^T \left(|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right) \mathrm{d}s < \infty$

Formulation du problème de martingale si $\mathcal{F}$ est une filtration Brownienne

Soit $(x^i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ un système de **coordonnées globales** sur $\mathcal{M}$.

Y est une martingale sur $\mathcal{M}$ de valeur terminale ξ

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{pour tout } i, \quad \mathrm{d}Y_t^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(Y_s)\,\mathrm{d}\left\langle Y^j, Y^k \right\rangle_s = Z_s^i\,\mathrm{d}W_s^i, \quad X_T^i = \xi^i,$$

où Z est donné par le théorème de représentation. $\rightsquigarrow$ **définition dans une carte locale**

Formulation du problème de martingale si $\mathcal{F}$ est une filtration Brownienne

Soit $(x^i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ un système de **coordonnées globales** sur $\mathcal{M}$.

$$Y \text{ est une martingale sur } \mathcal{M} \text{ de valeur terminale } \xi$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{pour tout } i, \quad \mathrm{d}Y_t^i - \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(Y_s)\,\mathrm{d}\left\langle Y^j, Y^k \right\rangle_s = Z_s^i\,\mathrm{d}W_s^i, \quad X_T^i = \xi^i,$$

où Z est donné par le théorème de représentation. $\rightsquigarrow$ **définition dans une carte locale**

Réecriture Backward

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{pour tout } i, \quad \mathrm{d}Y_t^i - \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(Y_s)Z_s^j Z_s^k \,\mathrm{d}s = Z_s^i \,\mathrm{d}W_s^i, \quad X_T^i = \xi^i,$$

Cela revient à résoudre sur $\mathbf{R}^d$ l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \,\mathrm{d}W_s,$$

avec $f(s, y, z) = -\frac{1}{2}\Gamma_{ij}(y)z^i z^j$.

Réecriture Backward

$$\iff$$

$$\text{pour tout } i, \quad \mathrm{d}Y_t^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(Y_s)Z_s^j Z_s^k \,\mathrm{d}s = Z_s^i \,\mathrm{d}W_s^i, \quad X_T^i = \xi^i,$$

Cela revient à résoudre sur $\mathbf{R}^d$ l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \,\mathrm{d}W_s,$$

avec $f(s,y,z) = -\frac{1}{2}\Gamma^{\cdot}_{ij}(y)z^i z^j$.

Sommaire

1 Martingales sur les variétés

2 Formulation en terme d'EDSR

3 Résultats

Résultat historique, cas Lipschitzien

$$\left|f(t,y,z)-f(t,y',z')\right| \leqslant K\left(\left|y-y'\right|+\left|z-z'\right|\right) \tag{HLip}$$

Theorem – 4.1 (Pardoux-Peng (1990)) *Sous (HLip), l'EDSR (3.1) admet une unique solution* (Y,Z) *telle que*

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\left|Y_s\right|^2\right)<\infty \text{ et } \mathbf{E}\left(\int_0^T\left|Z_s\right|^2\mathrm{d}s\right)<\infty.$$

Résultat historique, cas Lipschitzien

$$\left|f(t,y,z)-f(t,y',z')\right| \leqslant K\left(\left|y-y'\right|+\left|z-z'\right|\right) \tag{HLip}$$

THEOREM – 4.2 (PARDOUX-PENG (1990)) *Sous (HLip), l'EDSR (3.1) admet une unique solution* (Y,Z) *telle que*

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\left|Y_s\right|^2\right)<\infty \ \textit{et}\ \mathbf{E}\left(\int_0^T \left|Z_s\right|^2 \mathrm{d}s\right)<\infty.$$

$$f(s,y,z) = -\frac{1}{2}\Gamma^{\cdot}_{ij}(y)z^i z^j.$$

Malheureusement une croissance Lipschitzienne ne suffit pas dans notre cas. On doit considérer un cadre plus général, quadratique en z.

Hypothèses : cas quadratique

$$|f(t,y,z)-f(t,y',z)| \leqslant (K_y + L_y|z|^2)|y-y'|, \qquad \text{(HLipy)}$$
$$|f(t,y,z)-f(t,y,z')| \leqslant \left(K_z + L_z(|z|+|z'|)\right)|z-z'|. \qquad \text{(HQUADz)}$$

Résultat historique, cas quadratique

Kobylanski, Lepeltier et San Martin : obtiennent un résultat général dans le cas ξ bornée, $d = 1$ (voir [6] et [7])

THEOREM – 4.3 (KOBYLANSKI (2000)) *Sous*

1. $f(t, y, z) = a_0(t, y, z)y + f_0(t, y, z)$, $|a_0(t, y, z)| \leqslant A$, $|f_0(t, y, z)| \leqslant B + c(|y|)\,|z|^2$,
2. *c continue croissante*
3. *ξ bornée,*

l'EDSR admet au moins une solution.

Résultat historique, cas quadratique

Kobylanski, Lepeltier et San Martin : obtiennent un résultat général dans le cas ξ bornée, $d = 1$ (voir [6] et [7])

THEOREM – 4.4 (KOBYLANSKI (2000)) *Sous*

1. $f(t,y,z) = a_0(t,y,z)y + f_0(t,y,z)$, $|a_0(t,y,z)| \leqslant A$, $|f_0(t,y,z)| \leqslant B + c(|y|)\,|z|^2$,
2. *c continue croissante*
3. *ξ bornée,*

l'EDSR admet au moins une solution.

Autres résultats dans le cas quadratique

D'autres résultats, notamment

- Sous $d = 1$ toujours, ξ admettant un moment exponentiel, f convexe (Briand & Hu, 2006, [4])
- Dans le cas multidimensionnel,
  1. ξ bornée et de norme assez petite (Tevzadzé, 2012, [8])
  2. à générateur quadratique en la diagonale (Hu, Tang, 2014, [5]), $\alpha \in [1, 2[$

$$\left|f^i(y,z)\right| \leqslant C\left(1 + |y| + |z|^{\alpha} + \left|z^{ii}\right|^2\right).$$

Autres résultats dans le cas quadratique

D'autres résultats, notamment

- Sous $d = 1$ toujours, ξ admettant un moment exponentiel, f convexe (Briand & Hu, 2006, [4])
- Dans le cas multidimensionnel,
  1. ξ bornée et de norme assez petite (Tevzadzé, 2012, [8])
  2. à générateur quadratique en la diagonale (Hu, Tang, 2014, [5]), $\alpha \in [1, 2[$

$$\left|f^i(y,z)\right| \leqslant C\left(1 + |y| + |z|^\alpha + \left|z^{ii}\right|^2\right).$$

Autres résultats dans le cas quadratique

D'autres résultats, notamment

- Sous $d = 1$ toujours, ξ admettant un moment exponentiel, f convexe (Briand & Hu, 2006, [4])
- Dans le cas multidimensionnel,
  1. ξ bornée et de norme assez petite (Tevzadzé, 2012, [8])
  2. à générateur quadratique en la diagonale (Hu, Tang, 2014, [5]), $\alpha \in [1, 2[$
$$\left|f^i(y,z)\right| \leqslant C\left(1 + |y| + |z|^{\alpha} + \left|z^{ii}\right|^2\right).$$

Processus BMO

Une martingale $M = (M_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est dite BMO si

$$\|M\|_{BMO} = \sup_{\tau \text{ t.a.}} \left(\mathbf{E}\left((M_T - M_\tau)^2 \middle| \mathcal{F}_\tau\right)\right)^{1/2} < \infty.$$

Remark – 4.1
- *Une propriété importante : si M est BMO, $\exp(M)$ est U.I. ($\rightsquigarrow$ Girsanov)*
- *ici, un outil de calcul pour obtenir des estimations fines sur les solutions d'EDSR linéaires*

Processus BMO

Une martingale $M = (M_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est dite BMO si

$$\|M\|_{BMO} = \sup_{\tau \text{ t.a.}} \left(\mathbf{E}\Big((M_T - M_\tau)^2 \Big| \mathcal{F}_\tau\Big)\right)^{1/2} < \infty.$$

Remark – 4.2

- *Une propriété importante : si M est BMO, $\exp(M)$ est U.I. ($\rightsquigarrow$ Girsanov)*
- *ici, un outil de calcul pour obtenir des estimations fines sur les solutions d'EDSR linéaires*

Processus BMO

Une martingale $M = (M_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est dite BMO si

$$\|M\|_{BMO} = \sup_{\tau \text{ t.a.}} \left(\mathbf{E}\left((M_T - M_\tau)^2 \middle| \mathcal{F}_\tau\right)\right)^{1/2} < \infty.$$

REMARK – 4.3

- *Une propriété importante : si M est BMO,* $\exp(M)$ *est U.I. ($\rightsquigarrow$ Girsanov)*
- *ici, un outil de calcul pour obtenir des estimations fines sur les solutions d'EDSR linéaires*

Propriété importante propre au cas Lipschitz

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Sous (HLip), El Karoui, Peng et Quenez (1997, [1]) ont montré qu'il existe pour tout t, des familles de processus $(\mathbf{D}_u Y_t)_{0\leqslant u,t\leqslant T}, (\mathbf{D}_u Z_t)_{0\leqslant u,t\leqslant T}, (\mathbf{D}_u f(t,.,.))_{0\leqslant u,t\leqslant T}, (\mathbf{D}_u \xi)_{0\leqslant u,t\leqslant T}$ tels que :

Theorem – 4.5

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_u Y_t = \boldsymbol{D}_u \xi + \int_t^T \Big(& \nabla_y f(s, Y_s, Z_s)\, \boldsymbol{D}_u Y_s + \nabla_z f(s, Y_s, Z_s)\, \boldsymbol{D}_u Z_s \\ & + (\boldsymbol{D}_u f)(s, Y_s, Z_s) \Big) \mathrm{d}s - \int_t^T \boldsymbol{D}_u Z_s \mathrm{d}W_s, \end{aligned}$$

et $(\boldsymbol{D}_t Y_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est une version de Z.

Propriété importante propre au cas Lipschitz

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Sous (HLip), El Karoui, Peng et Quenez (1997, [1]) ont montré qu'il existe pour tout t, des familles de processus $(\mathbf{D}_u Y_t)_{0 \leqslant u,t \leqslant T}, (\mathbf{D}_u Z_t)_{0 \leqslant u,t \leqslant T}, (\mathbf{D}_u f(t,.,.))_{0 \leqslant u,t \leqslant T}, (\mathbf{D}_u \xi)_{0 \leqslant u,t \leqslant T}$ tels que :

Theorem – 4.6

$$\boldsymbol{D}_u Y_t = \boldsymbol{D}_u \xi + \int_t^T \Big(\nabla_y f(s, Y_s, Z_s)\, \boldsymbol{D}_u Y_s + \nabla_z f(s, Y_s, Z_s)\, \boldsymbol{D}_u Z_s + (\boldsymbol{D}_u f)(s, Y_s, Z_s) \Big) \mathrm{d}s - \int_t^T \boldsymbol{D}_u Z_s \mathrm{d}W_s,$$

et $(\boldsymbol{D}_t Y_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est une version de Z.

Propriété importante propre au cas Lipschitz

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Sous (HLip), El Karoui, Peng et Quenez (1997, [1]) ont montré qu'il existe pour tout t, des familles de processus $(\mathbf{D}_u Y_t)_{0\leqslant u,t\leqslant T}, (\mathbf{D}_u Z_t)_{0\leqslant u,t\leqslant T}, (\mathbf{D}_u f(t,.,.))_{0\leqslant u,t\leqslant T}, (\mathbf{D}_u \xi)_{0\leqslant u,t\leqslant T}$ tels que :

Theorem – 4.7

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_u Y_t = \boldsymbol{D}_u \xi + \int_t^T \Big(&\nabla_y f(s, Y_s, Z_s)\, \boldsymbol{D}_u Y_s + \nabla_z f(s, Y_s, Z_s)\, \boldsymbol{D}_u Z_s \\ &+ (\boldsymbol{D}_u f)(s, Y_s, Z_s)\Big)\mathrm{d}s - \int_t^T \boldsymbol{D}_u Z_s \mathrm{d}W_s,\end{aligned}$$

et $(\boldsymbol{D}_t Y_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ est une version de Z.

Ce qu'il faut en retenir

Si

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Z est la première coordonnée d'une solution $(Z, \widetilde{Z})$ d'EDSR de la forme

$$Z_t = \widetilde{\xi} + \int_t^T \Big(A_s Z_s + B_s \widetilde{Z_s} + C_s\Big)\mathrm{d}s - \int_t^T \widetilde{Z_s}\mathrm{d}W_s.$$

Ce qu'il faut en retenir

Si

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Z est la première coordonnée d'une solution $(Z, \widetilde{Z})$ d'EDSR de la

forme

$$Z_t = \widetilde{\xi} + \int_t^T \Big(A_s Z_s + B_s \widetilde{Z_s} + C_s\Big)\mathrm{d}s - \int_t^T \widetilde{Z_s}\mathrm{d}W_s.$$

EDSR Localisée

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

On change f en $f^M(t,y,z) = f(t,y,\rho_M(z))$ où

- ρ^M est l'identité sur $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d\times k}}(0,M)$,
- la projection sur $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d\times k}}(0,M+1)$ en dehors de $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d\times k}}(0,M+1)$,
- ρ^M est $\mathcal{C}^\infty$ avec $|\nabla\rho^M(z)| \leqslant 1$.

Il existe une solution (Y^M, Z^M) à l'EDSR localisée, avec f^M au lieu de f

EDSR Localisée

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

On change f en $f^M(t, y, z) = f(t, y, \rho_M(z))$ où

- ρ^M est l'identité sur $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d\times k}}(0, M)$,
- la projection sur $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d\times k}}(0, M+1)$ en dehors de $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d\times k}}(0, M+1)$,
- ρ^M est $\mathcal{C}^\infty$ avec $|\nabla \rho^M(z)| \leqslant 1$.

Il existe une solution (Y^M, Z^M) à l'EDSR localisée, avec f^M au lieu de f

EDSR Localisée

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

On change f en $f^M(t, y, z) = f(t, y, \rho_M(z))$ où

- ρ^M est l'identité sur $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d\times k}}(0, M)$,
- la projection sur $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d\times k}}(0, M+1)$ en dehors de $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^{d\times k}}(0, M+1)$,
- ρ^M est $\mathcal{C}^\infty$ avec $|\nabla \rho^M(z)| \leqslant 1$.

Il existe une solution (Y^M, Z^M) à l'EDSR localisée, avec f^M au lieu de f

Hypothèses du résultat

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.1}$$

Sous les hypothèses

1. (HLipy), (HQUADz),
2. $\mathbf{D}\xi$ borné
3. $\left|\mathbf{D}f(., Y^M, Z^M)\right| \leqslant C\left(1 + \left|Z^M\right|^2\right)$,
4. $mL_y \left\|Z^M \star W\right\|^2_{BMO} + 2L_z \left\|Z^M \star W\right\|_{BMO} C_m < \frac{1}{2}$,

C_m une constante (BDG) tel que $\|M\|_{\mathcal{S}^m} \leqslant C_m \|M\|_{\mathcal{H}^m}$.

Hypothèses du résultat

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.1}$$

Sous les hypothèses

1. (HLipy), (HQUADz),
2. $\mathbf{D}\xi$ borné
3. $\left|\mathbf{D}f(.,Y^M,Z^M)\right| \leqslant C\left(1+\left|Z^M\right|^2\right)$,
4. $mL_y \left\|Z^M \star W\right\|_{BMO}^2 + 2L_z \left\|Z^M \star W\right\|_{BMO} C_m < \frac{1}{2}$,

C_m une constante (BDG) tel que $\|M\|_{\mathcal{S}^m} \leqslant C_m \|M\|_{\mathcal{H}^m}$.

Hypothèses du résultat

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.1}$$

Sous les hypothèses

1. (HLipy), (HQUADz),
2. $\mathbf{D}\xi$ borné
3. $\left|\mathbf{D}f(., Y^M, Z^M)\right| \leqslant C\left(1 + \left|Z^M\right|^2\right),$
4. $mL_y \left\|Z^M \star W\right\|_{BMO}^2 + 2L_z \left\|Z^M \star W\right\|_{BMO} C_m < \frac{1}{2},$

C_m une constante (BDG) tel que $\|M\|_{\mathcal{S}^m} \leqslant C_m \|M\|_{\mathcal{H}^m}$.

Hypothèses du résultat

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.1}$$

Sous les hypothèses

1. (HLipy), (HQUADz),
2. $\mathbf{D}\xi$ borné
3. $\left|\mathbf{D}f(., Y^M, Z^M)\right| \leqslant C\left(1 + \left|Z^M\right|^2\right)$,
4. $mL_y \left\|Z^M \star W\right\|_{BMO}^2 + 2L_z \left\|Z^M \star W\right\|_{BMO} C_m < \frac{1}{2}$,

C_m une constante (BDG) tel que $\|M\|_{\mathcal{S}^m} \leqslant C_m \|M\|_{\mathcal{H}^m}$.

Résultat

$$\mathcal{Z}^m_{BMO} = \left\{ Z,\ \text{BMO process} \middle/ \frac{mL_y}{2} \|Z \star W\|^2_{BMO} + L_z C'_m \|Z \star W\|_{BMO} < \frac{1}{4} \right\}$$

THEOREM – 4.8 (2016) *Pour tout $m > 1$, sous les hypothèses précédentes, il existe une unique solution dans $\mathcal{S}^\infty \times (\mathcal{S}^\infty \cap \mathcal{Z}^m_{BMO})$.*

Résultat

$$\mathcal{Z}^m_{BMO} = \left\{ Z,\ \text{BMO process} \ \Big/ \frac{mL_y}{2} \|Z \star W\|^2_{BMO} + L_z C'_m \|Z \star W\|_{BMO} < \frac{1}{4} \right\}$$

THEOREM – 4.9 (2016) *Pour tout $m > 1$, sous les hypothèses précédentes, il existe une unique solution dans $\mathcal{S}^\infty \times (\mathcal{S}^\infty \cap \mathcal{Z}^m_{BMO})$.*

Idées pour l'existence

- considérer (Y^M, Z^M) solution de l'EDSR localisée. Il suffit d'établir que
$$\sup_M \left\|Z^M\right\|_{\mathcal{S}^\infty} < \infty.$$
Posant $M^* = \sup_M \left\|Z^M\right\|_{\mathcal{S}^\infty}$,
$$f^{M^\star}\left(s, Y_s^{M^\star}, Z_s^{M^\star}\right) = f\left(s, Y_s^{M^\star}, Z_s^{M^\star}\right).$$
Pour M assez grand, (Y^M, Z^M) stationne sur une vraie solution de l'EDSR quadratique.
- $(Z^M, \widetilde{Z^M})$ résout une EDSR linéaire $\hookrightarrow$ expression explicite de la solution et estimations fines sous une condition technique en norme BMO sur Z^M.

Idées pour l'existence

- considérer (Y^M, Z^M) solution de l'EDSR localisée. Il suffit d'établir que
$$\sup_M \left\|Z^M\right\|_{\mathcal{S}^\infty} < \infty.$$
Posant $M^* = \sup_M \left\|Z^M\right\|_{\mathcal{S}^\infty}$,
$$f^{M^\star}\left(s, Y_s^{M^\star}, Z_s^{M^\star}\right) = f\left(s, Y_s^{M^\star}, Z_s^{M^\star}\right).$$
Pour M assez grand, (Y^M, Z^M) stationne sur une vraie solution de l'EDSR quadratique.
- $(Z^M, \widetilde{Z^M})$ résout une EDSR linéaire $\hookrightarrow$ expression explicite de la solution et estimations fines sous une condition technique en norme BMO sur Z^M.

Idées pour l'existence

- considérer (Y^M, Z^M) solution de l'EDSR localisée. Il suffit d'établir que
$$\sup_M \left\| Z^M \right\|_{\mathcal{S}^\infty} < \infty.$$
Posant $M^* = \sup_M \left\| Z^M \right\|_{\mathcal{S}^\infty}$,
$$f^{M^\star}\left(s, Y_s^{M^\star}, Z_s^{M^\star}\right) = f\left(s, Y_s^{M^\star}, Z_s^{M^\star}\right).$$
Pour M assez grand, (Y^M, Z^M) stationne sur une vraie solution de l'EDSR quadratique.
- $(Z^M, \widetilde{Z^M})$ résout une EDSR linéaire $\hookrightarrow$ expression explicite de la solution et estimations fines sous une condition technique en norme BMO sur Z^M.

MC ; Peng S. EL Karoui, N ;Quenez.
Backward Stochastic Differential Equations In Finance.
pages 1–71, July 1997.

Michel Emery.
Martingales continues dans les variétés différentiables.
pages 1–83, October 2008.

Michel Emery.
Stochastic Calculus in Manifolds.
pages 1–157, October 2011.

Ying Hu.
BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value.
Probability Theory and Related Fields, 136(4) :604–618, April 2006.

Ying Hu and Shanjian Tang.
Multi-dimensional backward stochastic differential equations of diagonally quadratic generators.
Stochastic Processes and their Applications, 2015.

Magdalena Kobylanski.
Résultats d'existence et d'unicité pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec des générateurs à croissance quadratique.
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics, 324(1) :81–86, 1997.

Jean-Pierre Lepeltier and Jaime San Martin.
On the existence or non-existence of solutions for certain backward stochastic differential equations.
pages 1–15, March 2004.

Revaz Tevzadze.
Solvability of Backward Stochastic Differential Equations with Quadratic Growth .