TCL pour un processus de Crump-Mode-Jagers binaire homogène

Benoit Henry[1,2]

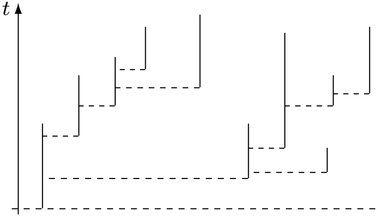
[1] IECL Nancy [2] INRIA Nancy

JPS
Les Houches
2016

Splitting Tree

Un modèle de dynamique des populations tel que :

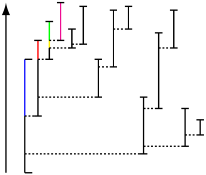
- Durées de vie i.i.d. suivant une loi $\mathbb{P}_V$.
- Conditionnellement aux durées de vie, reproduction Poissonienne à taux $b \in \mathbb{R}_+^*$.
- Unique individu racine (ancêtre).

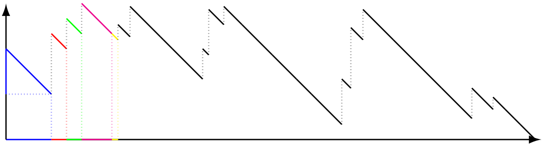


On s'intéresse au processus $(N_t, t \in \mathbb{R}_+)$ du nombre d'individus vivants de l'arbre au temps t.

Outil : processus de contour

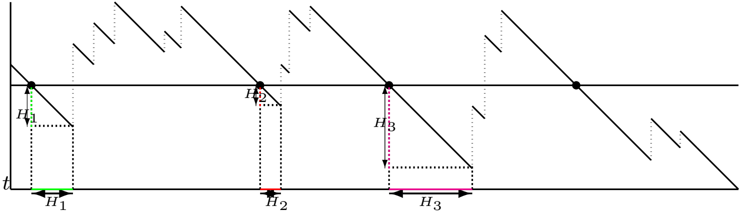
On va s'intéresser au processus de contour (Lambert, 2010) associé à l'arbre :





$$\psi(\lambda) = \lambda - \int_{\mathbb{R}_+} \left(1 - e^{-\lambda r}\right) \, b\mathbb{P}_V(dr), \ \ \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

N_t est le nombre d'intersection avec t du processus de contour avec la droite "$y = t$".



Par la propriété de Markov, N_t est donc de loi géométrique (conditionnellement à $\{N_t > 0\}$) de paramètre

$$\mathbb{P}_t\left(\tau_{[t,\infty]} < \tau_0\right) = \frac{1}{W(t)},$$

avec W caractérisée par sa transformée de Laplace,

$$T_{\mathcal{L}}W(\lambda) = \frac{1}{\psi(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

On note α la plus grande racine de ψ. On suppose $\alpha > 0$ (Cas surcritique.)

Théorèmes

Loi des grands nombres (Lambert 2010, Richard 2011)

Sur l'événement de non-extinction,

$$e^{-\alpha t}\psi'(\alpha)N_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} \mathcal{E},$$

avec $\mathcal{E}$ une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1.

Théorème central limite

$$e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(\psi'(\alpha)N_t - e^{\alpha t}\mathcal{E}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{L}\left(0, 2-\psi'(\alpha)\right)$$

relativement à $\mathbb{P}\left(. \mid \textit{Non extinction}\right)$.

Étape préliminaire

- $(G_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. géometriques $\mathcal{G}(n^{-1})$
- $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d., L^2, centrées, et indépendantes de $(G_n)_{n\geq 1}$.

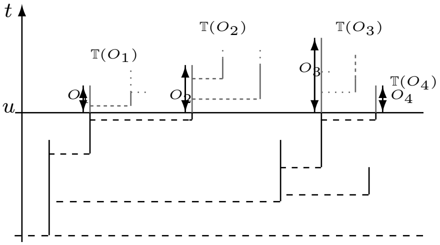
Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{G_n} X_i \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{L}\left(0, \mathbb{E}X_i^2\right).$$

Le but est d'obtenir quelque chose de semblable dans notre cas.

Idea

Avec $u < t$, N_t est la somme du nombre de descendants de chaques individus vivant au temps u.
On note les sous-arbres $\mathbb{T}(O_i)$, avec O_i la durée de vie restante à l'individu i au temps u.



On a

$$\psi'(\alpha)N_t - e^{\alpha t}\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N_u}\left(\psi'(\alpha)N_{t-u}^{(i)} - e^{\alpha(t-u)}\mathcal{E}^{(i)}\right).$$

On est pas dans la situation précédente car les v.a. que l'ont somme ne sont pas indépendante et dépendent du temps. Aller plus loin nécessite de

- Comprendre et contrôler les dépendances entre les termes de la somme.
- Obtenir des estimées sur leurs moments.

Merci !