Inégalités de concentration pour des fonctions séparément convexes de variables aléatoires indépendantes

Antoine Marchina
sous la direction de Emmanuel Rio

Laboratoire de Mathématiques de Versailles

Colloque Jeune Probabilistes et Statisticiens
20 Avril 2016

Introduction

Cadre :

- $X_1, \ldots, X_n$ v.a. centrées, **indépendantes** à valeurs dans un espace vectoriel normé E.

Introduction

Cadre :

- $X_1, \ldots, X_n$ v.a. centrées, **indépendantes** à valeurs dans un espace vectoriel normé E.
- $F : E^n \to \mathbb{R}$ **séparément convexe** (i.e. convexe en chaque variable)

Introduction

Cadre :

- $X_1, \ldots, X_n$ v.a. centrées, **indépendantes** à valeurs dans un espace vectoriel normé E.
- $F : E^n \to \mathbb{R}$ **séparément convexe** (i.e. convexe en chaque variable)

V.a. d'intérêt :

$$\mathbf{Z} := \mathbf{F}(\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X_n})$$

Introduction

Cadre :

- $X_1, \ldots, X_n$ v.a. centrées, **indépendantes** à valeurs dans un espace vectoriel normé E.
- $F : E^n \to \mathbb{R}$ **séparément convexe** (i.e. convexe en chaque variable)

V.a. d'intérêt :

$$\mathbf{Z} := \mathbf{F}(\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X_n})$$

But : Contrôler la **déviation de Z autour de sa moyenne**, i.e. borner la probabilité $\mathbb{P}(Z - \mathbb{E}[Z] \geq x)$ pour tout réel x.

Introduction

Cadre :

- $X_1, \ldots, X_n$ v.a. centrées, **indépendantes** à valeurs dans un espace vectoriel normé E.
- $F : E^n \to \mathbb{R}$ **séparément convexe** (i.e. convexe en chaque variable)

V.a. d'intérêt :

$$\mathbf{Z} := \mathbf{F}(\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X_n})$$

But : Contrôler la **déviation de Z autour de sa moyenne**, i.e. borner la probabilité $\mathbb{P}(Z - \mathbb{E}[Z] \geq x)$ pour tout réel x.

Plusieurs méthodes :

- méthode de martingales (exploitée ici)
- théorie de l'information
- méthode d'induction de Talagrand
- inégalités de Sobolev logarithmique

Exemples

- Suprema de processus empiriques randomisés : Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes et $Y_1, \ldots, Y_n$ des v.a. réelles symétriques, les deux suites étant indépendantes, et $\mathcal{F}$ une classe dénombrable de fonctions. Soit

$$Z := \sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{k=1}^{n} Y_k f(X_k)$$

Exemples

- Suprema de processus empiriques randomisés : Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes et $Y_1, \dots, Y_n$ des v.a. réelles symétriques, les deux suites étant indépendantes, et $\mathcal{F}$ une classe dénombrable de fonctions. Soit

$$Z := \sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{k=1}^{n} Y_k f(X_k)$$

- Suprema de chaos d'ordre 2 : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique, $\mathcal{F}$ une classe dénombrable de fonctions, $X_1, \dots, X_n$ des v.a. iid telles que $\mathbb{E}[f(X_1)] = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}$. Soit

$$Z := \sup_{(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} f(X_i) g(X_j)$$

Méthodes de martingales

On pose

$$\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_k := \sigma(X_1, \ldots, X_k),$$

et

$$Z_k := \mathbb{E}_k[Z - \mathbb{E}[Z]] := \mathbb{E}[Z - \mathbb{E}[Z] \mid \mathcal{F}_k].$$

Méthodes de martingales

On pose

$$\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_k := \sigma(X_1, \ldots, X_k),$$

et

$$Z_k := \mathbb{E}_k[Z - \mathbb{E}[Z]] := \mathbb{E}[Z - \mathbb{E}[Z] \mid \mathcal{F}_k].$$

Ainsi, $Z_n = Z - \mathbb{E}[Z]$, $Z_0 = 0$ et $(Z_k)_k$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_k)_k$.

Méthodes de martingales

On pose

$$\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_k := \sigma(X_1, \ldots, X_k),$$

et

$$Z_k := \mathbb{E}_k[Z - \mathbb{E}[Z]] := \mathbb{E}[Z - \mathbb{E}[Z] \mid \mathcal{F}_k].$$

Ainsi, $Z_n = Z - \mathbb{E}[Z]$, $Z_0 = 0$ et $(Z_k)_k$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_k)_k$.

Soit $\Delta_k := Z_k - Z_{k-1}$ (accroissements de la martingale), alors

$$Z - \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k.$$

Méthodes de martingales

On pose

$$\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_k := \sigma(X_1, \ldots, X_k),$$

et

$$Z_k := \mathbb{E}_k[Z - \mathbb{E}[Z]] := \mathbb{E}[Z - \mathbb{E}[Z] \mid \mathcal{F}_k].$$

Ainsi, $Z_n = Z - \mathbb{E}[Z]$, $Z_0 = 0$ et $(Z_k)_k$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_k)_k$.

Soit $\Delta_k := Z_k - Z_{k-1}$ (accroissements de la martingale), alors

$$Z - \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k.$$

$\rightarrow$ On se ramène aux contrôles des accroissements de la martingale.

Plan d'étude

Problème : Les accroissement Δ_k ne sont pas nécessairement bornés.

Plan d'étude

Problème : Les accroissement Δ_k ne sont pas nécessairement bornés.

$\rightarrow$ **Contrôle d'une v.a. réelle non bornée (et sous quelles hypothèses) ?**

Plan d'étude

Problème : Les accroissement Δ_k ne sont pas nécessairement bornés.

→ **Contrôle d'une v.a. réelle non bornée (et sous quelles hypothèses) ?**

→ **Quelle hypothèses sur F, $\mathbf{X_k}$?**

Rappel : Cas borné

Théorème (Inégalité de Hoeffding)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ *une suite de v.a. réelles telles que* $a_k \leq X_k \leq b_k$ *p.s. où* a_k *et* b_k *sont déterministes. Soit* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$*. Alors pour tout* $t > 0$*,*

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq t) \leq \exp\Big(- \frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \Big)$$

Rappel : Cas borné

Théorème (Inégalité de Hoeffding)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de v.a. réelles telles que $a_k \leq X_k \leq b_k$ p.s. où a_k et b_k sont déterministes. Soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq t) \leq \exp\Big(- \frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \Big)$$

Il apparaît dans la preuve que pour toute v.a. X vérifiant $\mathbf{a} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{b}$ et toute **fonction convexe** φ,

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \leq \mathbb{E}[\varphi(\theta)]$$

où θ est une v.a. de moyenne $\mathbb{E}[X]$ et prenant les valeurs a et b.

Rappel : Cas borné

Théorème (Inégalité de Hoeffding)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de v.a. réelles telles que $a_k \leq X_k \leq b_k$ p.s. où a_k et b_k sont déterministes. Soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq t) \leq \exp\left(- \frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \right)$$

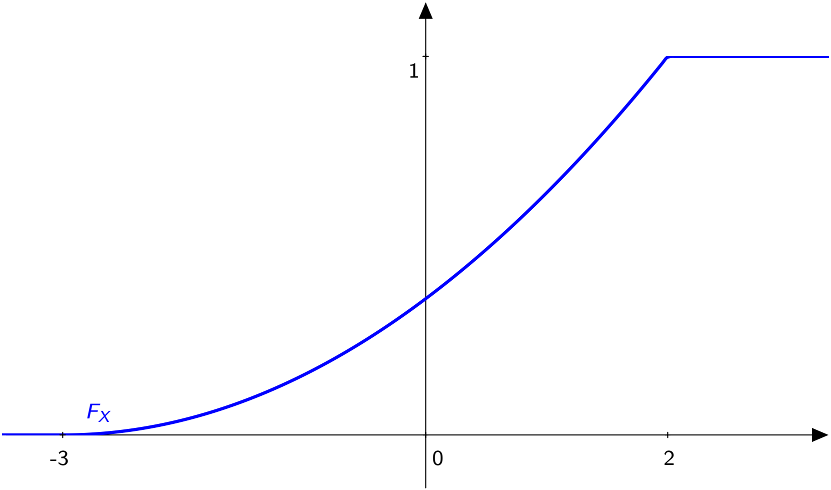
Il apparaît dans la preuve que pour toute v.a. X vérifiant $\mathbf{a} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{b}$ et toute **fonction convexe** φ,

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \leq \mathbb{E}[\varphi(\theta)]$$

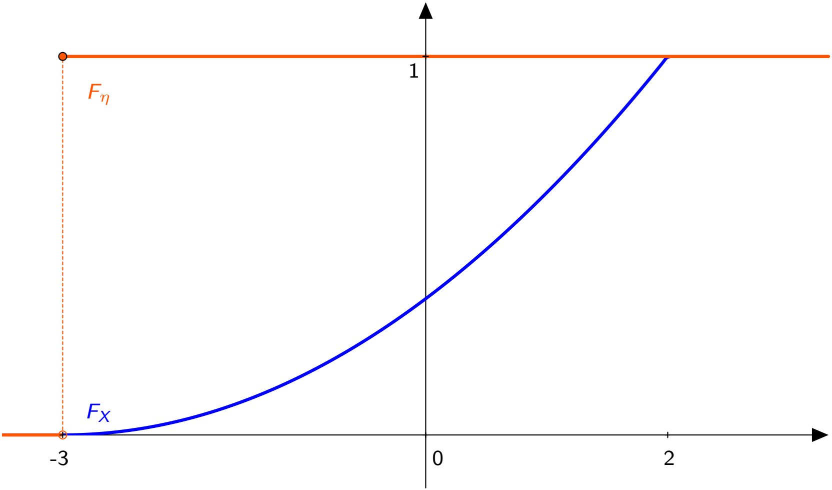
où θ est une v.a. de moyenne $\mathbb{E}[X]$ et prenant les valeurs a et b.

$\rightarrow$ **Analogue dans le cas non borné** ?

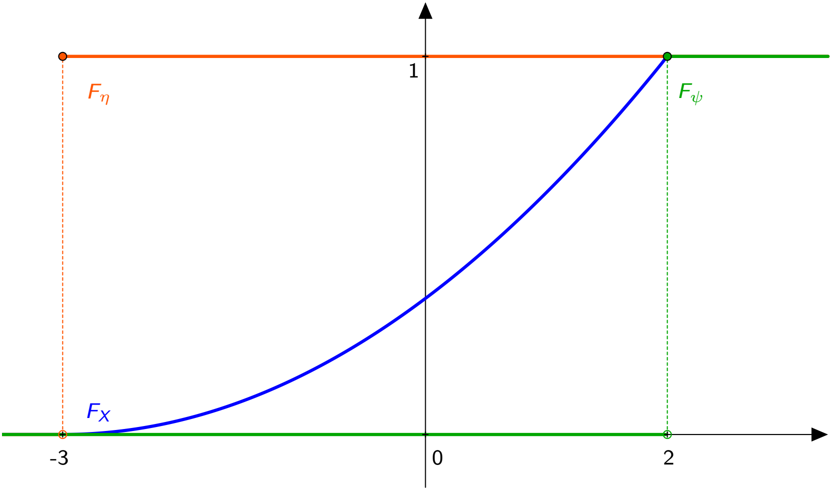
Cas borné



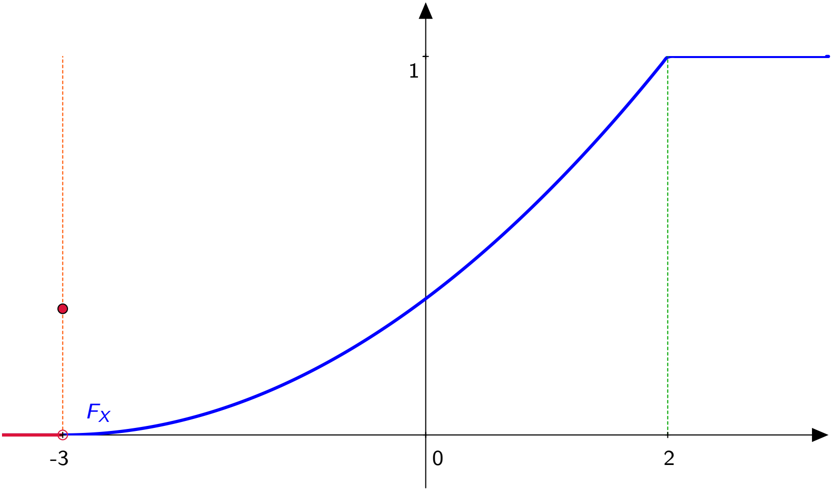
Cas borné



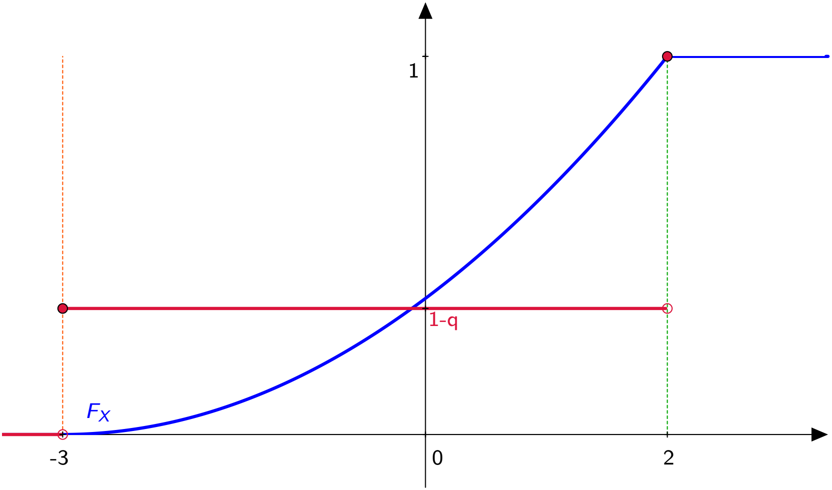
Cas borné



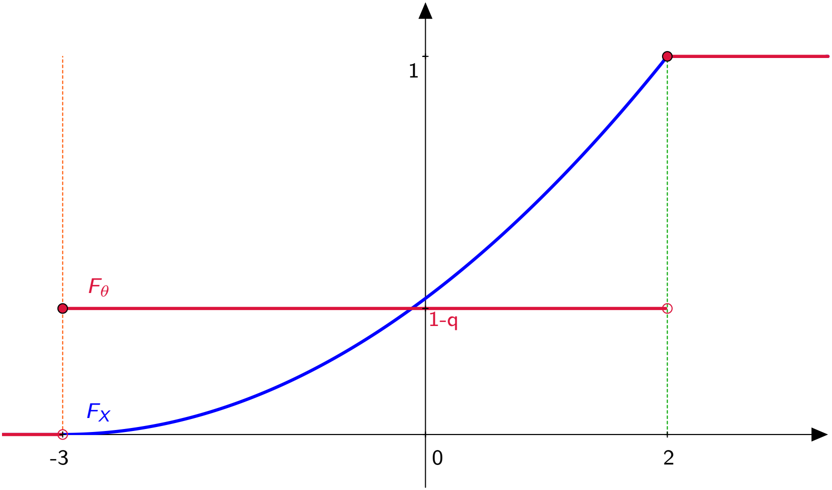
Cas borné



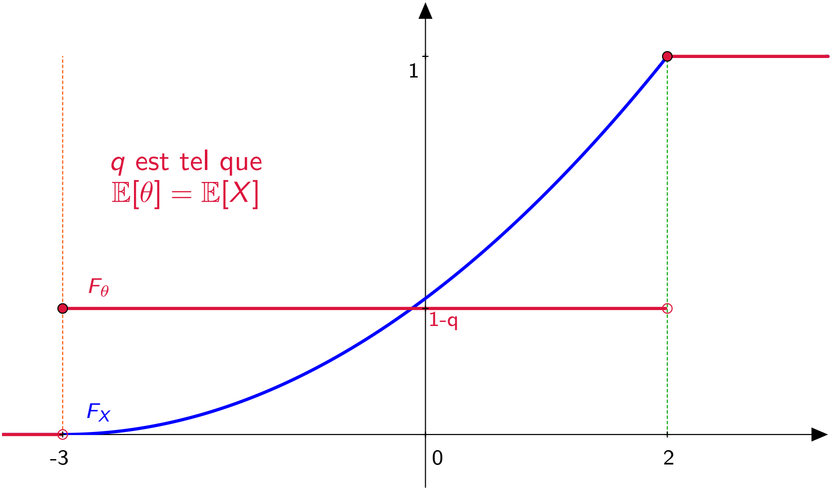
Cas borné



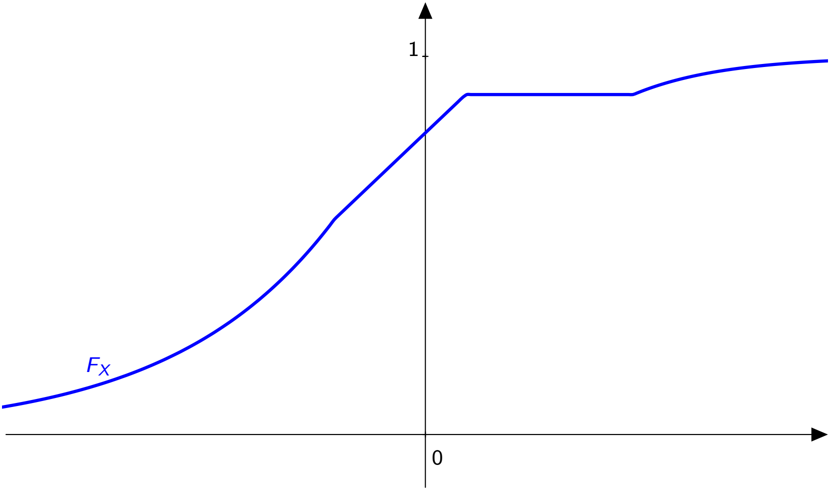
Cas borné



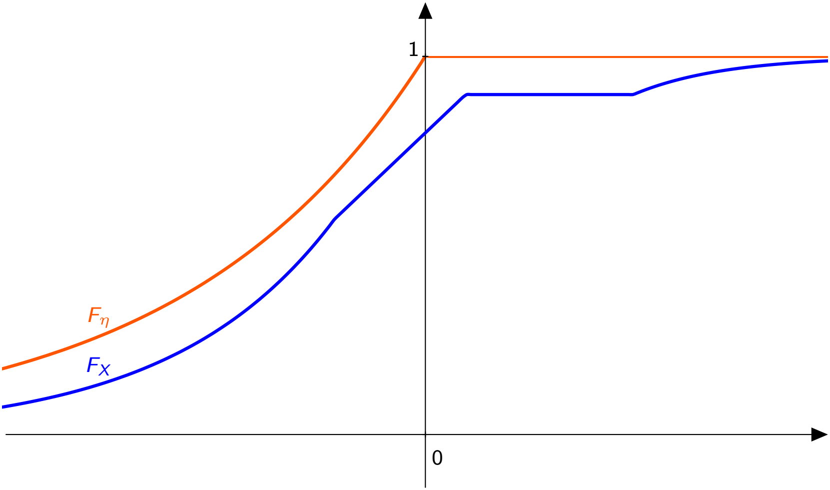
Cas borné



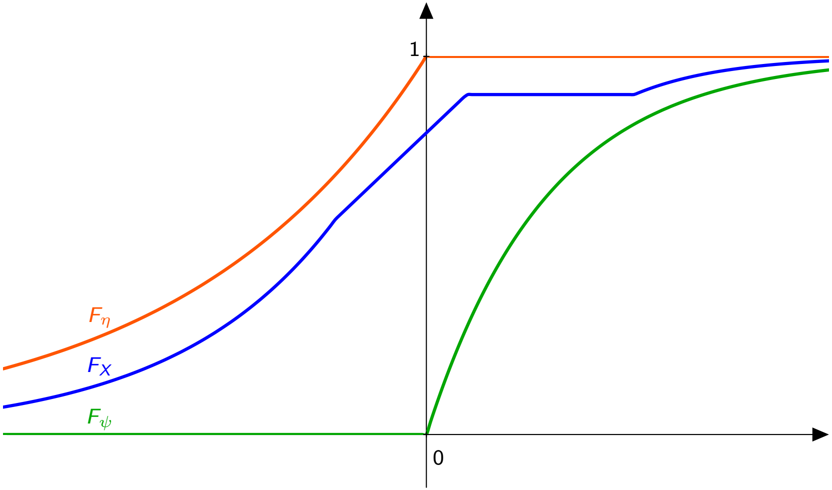
Cas non borné



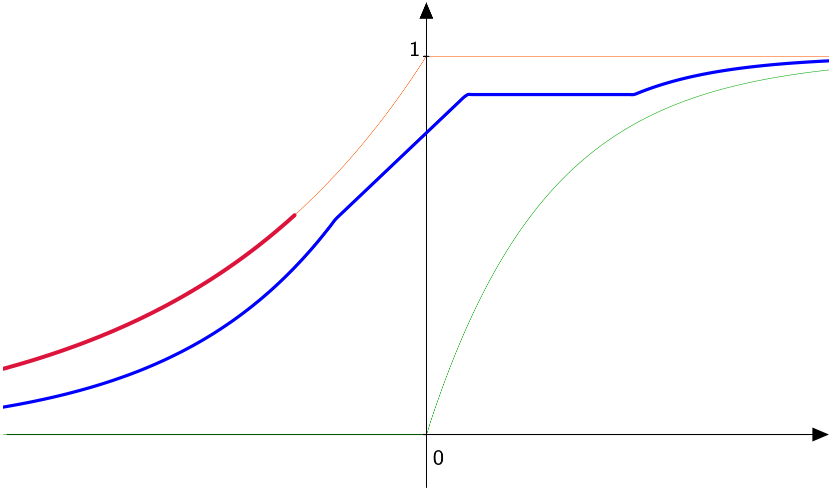
Cas non borné



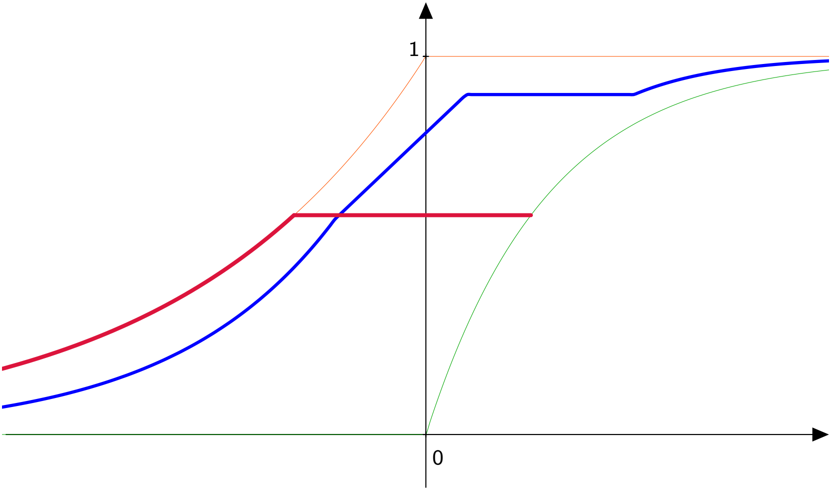
Cas non borné



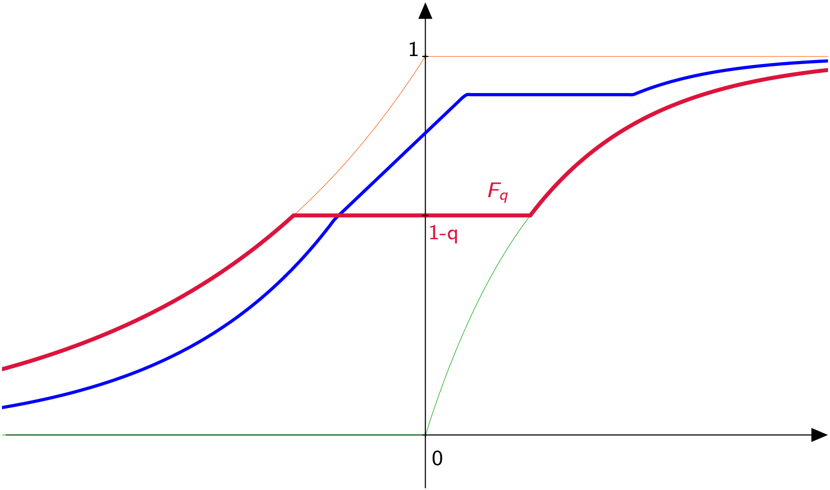
Cas non borné



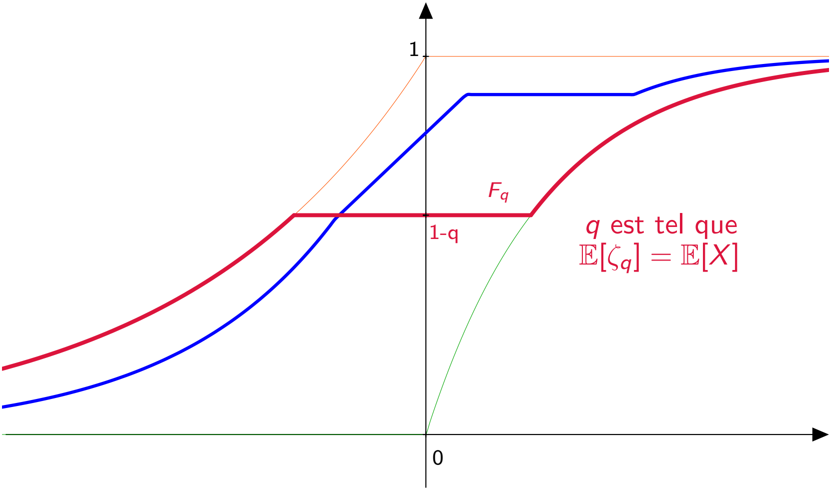
Cas non borné



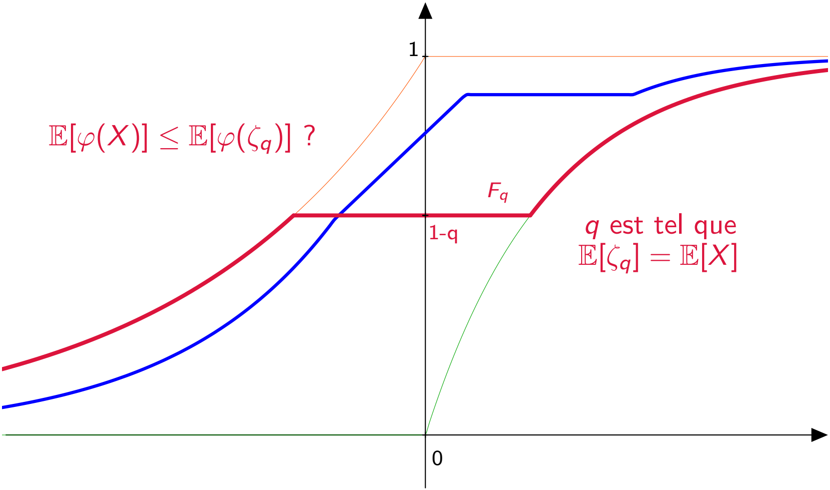
Cas non borné



Cas non borné



Cas non borné



Définition (Ordre stochastique usuel)

Soit X et Y deux v.a. réelles. **X est dite plus petite que Y en ordre stochastique usuel**, *noté $X \leq_{st} Y$, si pour tout réel x,*

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{P}(Y \geq x)$$

On se place désormais sous les hypothèses :

$$\eta \in L^1, \quad \psi \in L^2, \text{ et } \quad \eta \leq_{\mathrm{st}} \psi. \tag{1}$$

Définition de F_q

Définition

Pour tout q dans $(0,1)$, posons $a_q := F_\eta^{-1}(1-q)$, $b_q := F_\psi^{-1}(1-q)$ et soit F_q la fonction de répartition définie par

$$F_q(x) := \begin{cases} F_\eta(x) & \text{if } x < a_q, \\ 1-q & \text{if } a_q \leq x < b_q, \\ F_\psi(x) & \text{if } x \geq b_q. \end{cases}$$

On pose également $F_0 := F_\eta$ et $F_1 := F_\psi$.

Dans tout la suite, on désignera par $\boldsymbol{\zeta_q}$ **une v.a. de fonction de répartition $\mathbf{F_q}$**.

Cas non borné

Lemme (Bentkus (2010))

Soit X une v.a. intégrable telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(\psi - t)_+], \quad \mathbb{E}[(t-X)_+] \leq \mathbb{E}[(t-\eta)_+]. \quad (2)$$

Cas non borné

Lemme (Bentkus (2010))

Soit X *une v.a. intégrable telle que pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(\psi - t)_+], \quad \mathbb{E}[(t-X)_+] \leq \mathbb{E}[(t-\eta)_+]. \quad (2)$$

Soit q_0 *le plus grand réel de* $[0,1]$ *tel que*

$$\int_{1-q}^{1} (F_\psi^{-1}(u) - F_\eta^{-1}(u))du = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\eta].$$

Cas non borné

Lemme (Bentkus (2010))

Soit X une v.a. intégrable telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(\psi - t)_+], \quad \mathbb{E}[(t-X)_+] \leq \mathbb{E}[(t-\eta)_+]. \quad (2)$$

Soit q_0 le plus grand réel de $[0,1]$ tel que

$$\int_{1-q}^{1} (F_\psi^{-1}(u) - F_\eta^{-1}(u))du = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\eta].$$

Alors, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\zeta_{q_0}]$ *et pour $t \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(\zeta_{q_0} - t)_+].$$

Cas non borné

Lemme (Bentkus (2010))

Soit X *une v.a. intégrable telle que pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(\psi - t)_+], \quad \mathbb{E}[(t-X)_+] \leq \mathbb{E}[(t-\eta)_+]. \tag{2}$$

Soit q_0 *le plus grand réel de* $[0,1]$ *tel que*

$$\int_{1-q}^{1} (F_\psi^{-1}(u) - F_\eta^{-1}(u))du = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\eta].$$

Alors, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\zeta_{q_0}]$ *et pour* $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(\zeta_{q_0} - t)_+].$$

Par conséquent, pour toute fonction convexe φ,

$$\mathbb{E}[\varphi(X - \mathbb{E}[X])] \leq \mathbb{E}[\varphi(\zeta_{q_0} - \mathbb{E}[\zeta_{q_0}])]. \tag{3}$$

Le terme de droite dans (3) dépend encore de X par son espérance:

$$\mathbb{E}[\zeta_{q_0}] = \mathbb{E}[X].$$

Le terme de droite dans (3) dépend encore de X par son espérance:

$$\mathbb{E}[\zeta_{q_0}] = \mathbb{E}[X].$$

$\rightarrow$ On étudie la collection de fonction de répartition F_q ($q \in [0, 1]$).

Classe $\mathcal{H}_+^\alpha$

Définition (Classe $\mathcal{H}_+^\alpha$)

Soit $\alpha > 0$.

$$\mathcal{H}_+^\alpha := \Big\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists \mu \in \mathcal{M}_+, \forall u \in \mathbb{R}, \\ \varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (u-t)_+^\alpha \mu(dt)\Big\}.$$

Remarque

- $\mathcal{H}_+^1 = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \varphi \text{ convexe }\}$
- *Pour tout* $\alpha < \beta$, $\mathcal{H}_+^\beta \subset \mathcal{H}_+^\alpha$
- *Pour tout* $\alpha > 0$, $t \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda > 0$, $x \mapsto (x-t)_+^\alpha$ *et* $x \mapsto e^{\lambda(x-t)}$ *appartiennent à* $\mathcal{H}_+^\alpha$.

Classe $\mathcal{H}_+^\alpha$

Inégalité de déviation à partir d'une inégalité de comparaison

Proposition (Pinelis (1999))

Soit ξ et η des v.a. réelles dont la fonction de queue $x \mapsto \mathbb{P}(\eta \geq x)$ est log-concave sur $\mathbb{R}$. Alors l'inégalité de comparaison

$$\mathbb{E}[\varphi(\xi)] \leq \mathbb{E}[\varphi(\eta)] \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}_+^\alpha$$

implique pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{H}_+^\alpha} \frac{\mathbb{E}[\varphi(\eta)]}{\varphi(x)} = \inf_{t<x} \frac{\mathbb{E}[(\eta - t)_+^\alpha]}{(x-t)^\alpha}$$
$$\leq c_{\alpha,0}\, \mathbb{P}(\eta \geq x)$$

où la constante $c_{\alpha,0} := \Gamma(\alpha+1)(e/\alpha)^\alpha$ est la meilleure possible.

Lemme

Soit ψ une v.a. positive et η une v.a. négative satisfaisant

$$\eta \in L^1, \quad \psi \in L^2, \text{ and } \quad \eta \leq_{st} \psi.$$

.

Lemme

Soit ψ une v.a. positive et η une v.a. négative satisfaisant

$$\eta \in L^1, \quad \psi \in L^2, \text{ and } \quad \eta \leq_{st} \psi.$$

i. *Soit $\tilde{q} = \inf\{q \geq 1/2 : b_q + a_q \leq 2\,\mathbb{E}[\zeta_q]\}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction*

$$q \mapsto \mathbb{E}[(\zeta_q - \mathbb{E}[\zeta_q] - t)_+^2]$$

est décroissante sur $[\tilde{q}, 1]$.

Lemme

Soit ψ une v.a. positive et η une v.a. négative satisfaisant

$$\eta \in L^1, \quad \psi \in L^2, \text{ and } \quad \eta \leq_{st} \psi.$$

i. *Soit $\tilde{q} = \inf\{q \geq 1/2 : b_q + a_q \leq 2\,\mathbb{E}[\zeta_q]\}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction*

$$q \mapsto \mathbb{E}[(\zeta_q - \mathbb{E}[\zeta_q] - t)_+^2]$$

est décroissante sur $[\tilde{q}, 1]$.

ii. *Supposons que $\eta = -\psi$ et que X satisfait (2). Si de plus $\mathbb{E}[X] \geq 0$, alors pour toute fonction φ dans $\mathcal{H}_+^2$,*

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X - \mathbb{E}[X])\right] \leq \mathbb{E}\left[\varphi(\zeta_{1/2})\right].$$

Rappel :

$$(2) \quad \mathbb{E}[(X-t)_+] \leq \mathbb{E}[(\psi - t)_+], \quad \mathbb{E}[(t-X)_+] \leq \mathbb{E}[(t-\eta)_+]$$

$\zeta_{1/2}$?

Définition

On appelle **fonction quantile** *d'une v.a. réelle X, l'inverse généralisée de la fonction de survie de X, $\mathbb{P}(X > t)$. On la note Q_X. Précisément,*

$$Q_X(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X > x) \leq u\}.$$

Remarque

On a $\zeta_{1/2} \overset{loi}{=} \varepsilon Q_\psi(U/2)$ où ε est un v.a. de Rademacher, U est une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$ et ces v.a. sont indépendantes.

Résultats principaux

Résultats principaux

On note

$$Z^{(k)} = F(X_1, \ldots, X_{k-1}, 0, X_{k+1}, \ldots, X_n)$$

Résultats principaux

On note

$$Z^{(k)} = F(X_1, \dots, X_{k-1}, 0, X_{k+1}, \dots, X_n)$$

Ainsi $\mathbb{E}_k[Z^{(k)}]$ est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable. On peut donc écrire

$$\Delta_k = Z_k - \mathbb{E}_k[Z^{(k)}] - \mathbb{E}_{k-1}[Z_k - \mathbb{E}_k[Z^{(k)}]]$$

Résultats principaux

On note

$$Z^{(k)} = F(X_1, \dots, X_{k-1}, 0, X_{k+1}, \dots, X_n)$$

Ainsi $\mathbb{E}_k[Z^{(k)}]$ est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable. On peut donc écrire

$$\Delta_k = Z_k - \mathbb{E}_k[Z^{(k)}] - \mathbb{E}_{k-1}[Z_k - \mathbb{E}_k[Z^{(k)}]]$$

Comme F est séparément convexe, le théorème de Fubini implique

$$\mathbb{E}_{k-1}[Z_k - \mathbb{E}_k[Z^{(k)}]] \geq 0$$

Théorème

Supposons que pour tout $k = 1, \ldots, n$, il existe des v.a. positives, intégrables et $\sigma(X_k)$-mesurable T_k and W_k telles que,

$$-T_k \leq Z - Z^{(k)} \leq W_k, \quad p.s.. \tag{4}$$

Théorème

Supposons que pour tout $k = 1, \ldots, n$, il existe des v.a. positives, intégrables et $\sigma(X_k)$-mesurable T_k and W_k telles que,

$$- T_k \leq Z - Z^{(k)} \leq W_k, \quad p.s.. \tag{4}$$

Soit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ une suite de v.a. positives telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\max\left(\mathbb{E}[(T_k - t)_+], \mathbb{E}[(W_k - t)_+]\right) \leq \mathbb{E}[(\xi_k - t)_+].$$

Théorème

Supposons que pour tout $k = 1, \ldots, n$, il existe des v.a. positives, intégrables et $\sigma(X_k)$-mesurable T_k and W_k telles que,

$$-T_k \leq Z - Z^{(k)} \leq W_k, \quad p.s.. \tag{4}$$

Soit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ une suite de v.a. positives telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\max\left(\mathbb{E}[(T_k - t)_+], \mathbb{E}[(W_k - t)_+]\right) \leq \mathbb{E}[(\xi_k - t)_+].$$

Alors, pour toutes fonctions φ de $\mathcal{H}_+^2$,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(Z - \mathbb{E}[Z])\right] \leq \mathbb{E}\left[\varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k Q_{\xi_k}(U_k/2)\Big)\right].$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont des v.a. iid de Rademacher, $U_1, \ldots, U_n$ sont des v.a. iid de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Théorème

Soit $p > 2$. Supposons que pout tout $k = 1, \ldots, n$, il existe des v.a. positives, intégrables et $\sigma(X_k)$-mesurable T_k et W_k, et des v.a. positives, intégrables et $\mathcal{F}_n^k$-mesurable ψ_k telles que

$$-T_k\psi_k \leq Z - Z^{(k)} \leq W_k\psi_k, \quad p.s..$$

Théorème

Soit $p > 2$. Supposons que pout tout $k = 1, \dots, n$, il existe des v.a. positives, intégrables et $\sigma(X_k)$-mesurable T_k et W_k, et des v.a. positives, intégrables et $\mathcal{F}_n^k$-mesurable ψ_k telles que

$$-T_k\psi_k \leq Z - Z^{(k)} \leq W_k\psi_k, \quad p.s..$$

Soit $\xi_1, \dots, \xi_n$ une suite de v.a. positives telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\max\left(\mathbb{E}[(T_k - t)_+], \mathbb{E}[(W_k - t)_+]\right) \leq \mathbb{E}[(\xi_k - t)_+].$$

Théorème

Soit $p > 2$. Supposons que pout tout $k = 1, \ldots, n$, il existe des v.a. positives, intégrables et $\sigma(X_k)$-mesurable T_k et W_k, et des v.a. positives, intégrables et $\mathcal{F}_n^k$-mesurable ψ_k telles que

$$-T_k\psi_k \leq Z - Z^{(k)} \leq W_k\psi_k, \quad p.s..$$

Soit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ une suite de v.a. positives telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\max\left(\mathbb{E}[(T_k - t)_+], \mathbb{E}[(W_k - t)_+]\right) \leq \mathbb{E}[(\xi_k - t)_+].$$

Alors

$$\|(Z - \mathbb{E}[Z])_+\|_p^2 \leq (p-1)\sum_{k=1}^{n} \|\mathbb{E}_{k-1}[\psi_k]\|_p^2 \, \|Q_{\xi_k}(U_k/2)\|_p^2,$$

où $U_1, \ldots, U_n$ sont des v.a. iid de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Idée de démonstration

Problème : Dans la domination de Δ_k apparaît le terme $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable $\mathbb{E}_{k-1}[\psi_k]$.

Idée de démonstration

Problème : Dans la domination de Δ_k apparaît le terme $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable $\mathbb{E}_{k-1}[\psi_k]$.

Proposition

Soit $p > 2$, X et Y des v.a. dans $\mathbb{L}^p$ telles que $\mathbb{E}[Y \mid X] = 0$ p.s. Alors $\|(X+Y)_+\|_p^2 \leq \|(X)_+\|_p^2 + (p-1)\|Y\|_p^2$.

Merci de votre attention !