Arbres Markov-branchants avec immigration

DAUPHINE
UNIVERSITÉ PARIS
CEREMADE

Camille Pagnard
Université Paris Dauphine

Encadré par Bénédicte Haas

21 avril 2016
Colloque JPS

1) Arbres Markov-branchants
...finis
...infinis

2) Grands arbres Markov-branchants

3) Arbres de GW conditionnés

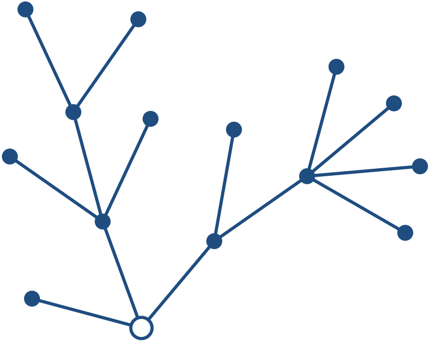

FIGURE – Arbre enraciné, non-étiqueté et non-ordonné

Étudier les familles $(\mathbf{P}_n)_n$ telles que :

- Si T suit $\mathbf{P}_n$, alors T a n nœuds,
- Conditionnellement à :
  - La racine de T donne naissance à p sous-arbres $T_1, \ldots, T_p$,
  - T_i a n_i nœuds,

  Alors les T_i sont indépendants et de loi $\mathbf{P}_{n_i}$.

Étudier les familles $(\mathbf{P}_n)_n$ telles que :

- Si T suit $\mathbf{P}_n$, alors T a n nœuds,
- Conditionnellement à :
  - La racine de T donne naissance à p sous-arbres $T_1, \ldots, T_p$,
  - T_i a n_i nœuds,

  Alors les T_i sont indépendants et de loi $\mathbf{P}_{n_i}$.

C'est la propriété de Markov-branchante.

Étudier les familles $(\mathbf{P}_n)_n$ telles que :

- Si T suit $\mathbf{P}_n$, alors T a n nœuds,
- Conditionnellement à :
  - La racine de T donne naissance à p sous-arbres $T_1, \dots, T_p$,
  - T_i a n_i nœuds,

  Alors les T_i sont indépendants et de loi $\mathbf{P}_{n_i}$.

C'est la propriété de Markov-branchante.
$(\mathbf{P}_n)_n$ est caractérisée par la manière de répartir la masse à la racine.

Construction

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des *partitions* de n :

Construction

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des *partitions* de n : $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ décroissantes de somme n.

Construction

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des *partitions* de n : $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ décroissantes de somme n.

Pour tout n, soit q_n une loi sur $\mathcal{P}_{n-1}$. On peut construire une suite $(\mathrm{MB}_n^q)_n$ de lois Markov-branchantes associée à q.

Construction

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des *partitions* de n : $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ décroissantes de somme n.

Pour tout n, soit q_n une loi sur $\mathcal{P}_{n-1}$. On peut construire une suite $(\mathrm{MB}_n^q)_n$ de lois Markov-branchantes associée à q.

Pour $n = 1$, arbre trivial : $\{\text{racine}\}$.

Construction

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des *partitions* de n : $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ décroissantes de somme n.

Pour tout n, soit q_n une loi sur $\mathcal{P}_{n-1}$. On peut construire une suite $(\mathrm{MB}_n^q)_n$ de lois Markov-branchantes associée à q.

Pour $n = 1$, arbre trivial : {racine}. Pour n plus grand, on procède récursivement :

- On se donne Λ de loi q_n,

Construction

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des *partitions* de n : $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ décroissantes de somme n.

Pour tout n, soit q_n une loi sur $\mathcal{P}_{n-1}$. On peut construire une suite $(\mathrm{MB}_n^q)_n$ de lois Markov-branchantes associée à q.

Pour $n = 1$, arbre trivial : {racine}. Pour n plus grand, on procède récursivement :

- On se donne Λ de loi q_n,
- Conditionnellement à $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, soient $T_1, \dots, T_p$ des arbres indépendants de lois respectives $\mathrm{MB}^q_{\lambda_1}, \dots, \mathrm{MB}^q_{\lambda_p}$,

Construction

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des *partitions* de n : $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ décroissantes de somme n.

Pour tout n, soit q_n une loi sur $\mathcal{P}_{n-1}$. On peut construire une suite $(\mathrm{MB}_n^q)_n$ de lois Markov-branchantes associée à q.

Pour $n = 1$, arbre trivial : {racine}. Pour n plus grand, on procède récursivement :

- On se donne Λ de loi q_n,
- Conditionnellement à $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, soient $T_1, \ldots, T_p$ des arbres indépendants de lois respectives $\mathrm{MB}_{\lambda_1}^q, \ldots, \mathrm{MB}_{\lambda_p}^q$,
- On note T la concaténation de $T_1, \ldots, T_p$ et MB_n^q sa loi.

Figure – Construction d'un arbre à n nœuds

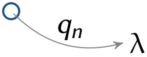

Figure – Construction d'un arbre à n nœuds

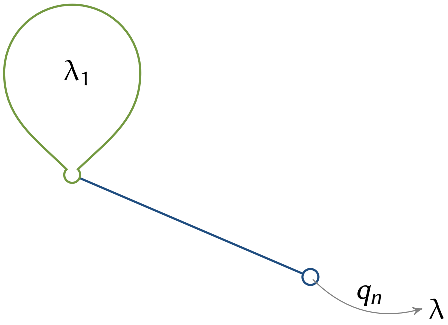

FIGURE – Construction d'un arbre à n nœuds

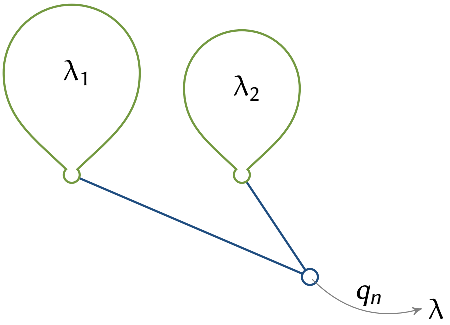

FIGURE – Construction d'un arbre à n nœuds

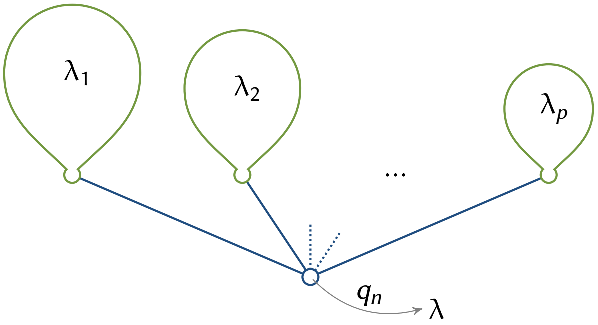

Figure – Construction d'un arbre à n nœuds

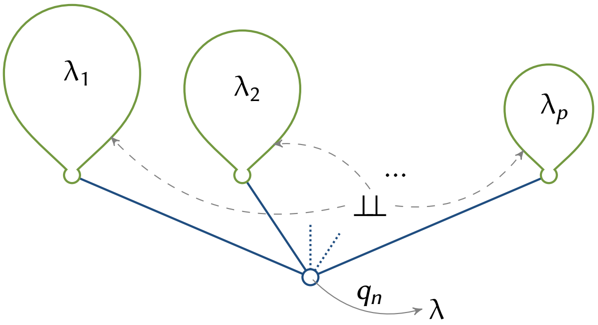

Figure – Construction d'un arbre à n nœuds

Arbre infini

On note $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des partitions (de longueur finie) de l'infini.

Soit q_∞ une probabilité sur $\mathcal{P}_\infty$ telle qu'une partition Λ de loi q_∞ n'a qu'un bloc infini.

Arbre infini

On note $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des partitions (de longueur finie) de l'infini.

Soit q_∞ une probabilité sur $\mathcal{P}_\infty$ telle qu'une partition Λ de loi q_∞ n'a qu'un bloc infini. On note q_* la loi de $(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_p)$.

Arbre infini

On note $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des partitions (de longueur finie) de l'infini.

Soit q_∞ une probabilité sur $\mathcal{P}_\infty$ telle qu'une partition Λ de loi q_∞ n'a qu'un bloc infini. On note q_* la loi de $(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_p)$.

On peut construire un arbre Markov-branchant infini associé à q_n, $n \geq 1$ et q_∞.

Arbre infini

On note $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des partitions (de longueur finie) de l'infini.

Soit q_∞ une probabilité sur $\mathcal{P}_\infty$ telle qu'une partition Λ de loi q_∞ n'a qu'un bloc infini. On note q_* la loi de $(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_p)$.

On peut construire un arbre Markov-branchant infini associé à q_n, $n \geq 1$ et q_∞. Soit $(\Lambda_n, T_n)_{n\geq 0}$ une suite i.i.d. telle que :

Arbre infini

On note $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des partitions (de longueur finie) de l'infini.

Soit q_∞ une probabilité sur $\mathcal{P}_\infty$ telle qu'une partition Λ de loi q_∞ n'a qu'un bloc infini. On note q_* la loi de $(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_p)$.

On peut construire un arbre Markov-branchant infini associé à q_n, $n \geq 1$ et q_∞. Soit $(\Lambda_n, T_n)_{n\geq 0}$ une suite i.i.d. telle que :

- Λ_n suive q_*

Arbre infini

On note $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des partitions (de longueur finie) de l'infini.

Soit q_∞ une probabilité sur $\mathcal{P}_\infty$ telle qu'une partition Λ de loi q_∞ n'a qu'un bloc infini. On note q_* la loi de $(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_p)$.

On peut construire un arbre Markov-branchant infini associé à q_n, $n \geq 1$ et q_∞. Soit $(\Lambda_n, T_n)_{n\geq 0}$ une suite i.i.d. telle que :

– Λ_n suive q_* – si $\Lambda_n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, T_n est la concaténation de $T_n^{(1)}, \ldots, T_n^{(p)}$ indépendants où $T_n^{(i)}$ suit $\mathrm{MB}^q_{\lambda_i}$.

Arbre infini

On note $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des partitions (de longueur finie) de l'infini.

Soit q_∞ une probabilité sur $\mathcal{P}_\infty$ telle qu'une partition Λ de loi q_∞ n'a qu'un bloc infini. On note q_* la loi de $(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_p)$.

On peut construire un arbre Markov-branchant infini associé à q_n, $n \geq 1$ et q_∞. Soit $(\Lambda_n, T_n)_{n\geq 0}$ une suite i.i.d. telle que :

– Λ_n suive q_* – si $\Lambda_n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, T_n est la concaténation de $T_n^{(1)}, \ldots, T_n^{(p)}$ indépendants où $T_n^{(i)}$ suit $\mathrm{MB}^q_{\lambda_i}$.

On attache alors chaque T_n à hauteur n sur une branche infinie.

Arbre infini

On note $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble des partitions (de longueur finie) de l'infini.

Soit q_∞ une probabilité sur $\mathcal{P}_\infty$ telle qu'une partition Λ de loi q_∞ n'a qu'un bloc infini. On note q_* la loi de $(\Lambda_2, \ldots, \Lambda_p)$.

On peut construire un arbre Markov-branchant infini associé à q_n, $n \geq 1$ et q_∞. Soit $(\Lambda_n, T_n)_{n \geq 0}$ une suite i.i.d. telle que :

– Λ_n suive q_* – si $\Lambda_n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, T_n est la concaténation de $T_n^{(1)}, \ldots, T_n^{(p)}$ indépendants où $T_n^{(i)}$ suit $\mathrm{MB}^q_{\lambda_i}$.
On attache alors chaque T_n à hauteur n sur une branche infinie.

La loi q_* peut être vue comme une mesure d'immigration.

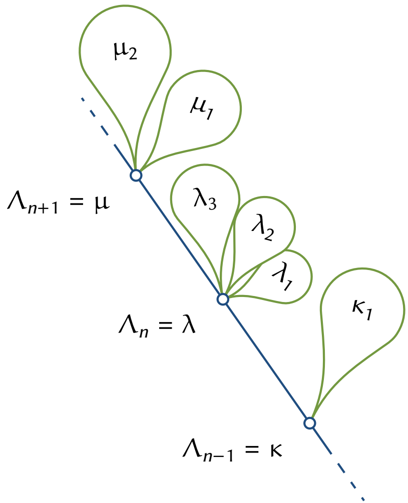

FIGURE – Arbre Markov-branchant avec immigration

Limites d'échelle

On note $\iota : \mathcal{P}_{<\infty} \to \ell_1^{\downarrow}$ $\iota(\lambda) = (\lambda_1/n, \dots, \lambda_p/n, 0, 0, \dots)$ pour $\lambda \in \mathcal{P}_n$

Limites d'échelle

On note $\iota : \mathcal{P}_{<\infty} \to \ell_1^{\downarrow}$ $\iota(\lambda) = (\lambda_1/n, \ldots, \lambda_p/n, 0, 0, \ldots)$ pour $\lambda \in \mathcal{P}_n$ et on pose $\bar{q}_n := q_n \circ \iota^{-1}$.

Limites d'échelle

On note $\iota : \mathcal{P}_{<\infty} \to \ell_1^\downarrow$ $\iota(\lambda) = (\lambda_1/n, \ldots, \lambda_p/n, 0, 0, \ldots)$ pour $\lambda \in \mathcal{P}_n$ et on pose $\bar{q}_n := q_n \circ \iota^{-1}$.
Une mesure de dislocation est une mesure σ-finie ν sur $\ell_1^\downarrow$ telle que $\nu(\|\mathbf{s}\| \neq 1) = 0$ et qui intègre $\mathbf{s} \mapsto 1 - s_1$.

Limites d'échelle

On note $\iota : \mathcal{P}_{<\infty} \to \ell_1^{\downarrow}$ $\iota(\lambda) = (\lambda_1/n, \dots, \lambda_p/n, 0, 0, \dots)$ pour $\lambda \in \mathcal{P}_n$ et on pose $\bar{q}_n := q_n \circ \iota^{-1}$.
Une mesure de dislocation est une mesure σ-finie ν sur $\ell_1^{\downarrow}$ telle que $\nu(\|\mathbf{s}\| \neq 1) = 0$ et qui intègre $\mathbf{s} \mapsto 1 - s_1$.

Théorème (Haas-Miermont, 2012)

S'il existe $\gamma \in]0,1[$ et une mesure de dislocation ν tels que :

$$n^{\gamma}\,(1 - s_1)\,\bar{q}_n(\mathrm{d}\,\mathbf{s}) \Rightarrow (1 - s_1)\nu(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$$

Alors :

$$\frac{1}{n^{\gamma}} T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{T}_{\gamma,\nu}$$

Topologie de la limite locale

Pour tout arbre $\mathtt{t}$ et $R \geq 0$ on note $\mathtt{t}|_R$ ses R $1^{\text{ères}}$ générations.

Topologie de la limite locale

Pour tout arbre $\mathtt{t}$ et $R \geq 0$ on note $\mathtt{t}|_R$ ses R $1^{\text{ères}}$ générations.

Pour deux arbres $\mathtt{t}$ et $\mathtt{t}'$ on définit :

$$\mathrm{d}_{\mathrm{loc}}(\mathtt{t}, \mathtt{t}') := \exp\Big(-\inf\{R \geq 0 \,:\, \mathtt{t}|_R \neq \mathtt{t}'|_R\}\Big)$$

Topologie de la limite locale

Pour tout arbre $\mathtt{t}$ et $R \geq 0$ on note $\mathtt{t}|_R$ ses R $1^{\text{ères}}$ générations.

Pour deux arbres $\mathtt{t}$ et $\mathtt{t}'$ on définit :

$$\mathrm{d}_{\mathrm{loc}}(\mathtt{t}, \mathtt{t}') := \exp\left(-\inf\{R \geq 0 \,:\, \mathtt{t}|_R \neq \mathtt{t}'|_R\}\right)$$

Si τ_n, $n \geq 1$ et τ sont des arbres aléatoires alors τ_n converge en loi vers τ s.s.i. :

$$\forall \mathtt{t}, \forall R \geq 0, \quad \mathbb{P}\left[\tau_n|_R = \mathtt{t}|_R\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left[\tau|_R = \mathtt{t}|_R\right]$$

Limites locales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, notons Λ_n de loi q_n.

Théorème (P.)

Si pour toute partition finie λ *on a :*

$$\mathbb{P}\Big[\big(\Lambda_n(2), \ldots, \Lambda_n(p)\big) = \lambda\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} q_*(\lambda)$$

Alors :

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathrm{MB}^q_\infty$$

Idée de la preuve

Montrer que pour tout $R \geq 0$ et $\mathtt{t}$:

$$\mathbb{P}\left[T_n|_R = \mathtt{t}|_R \right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left[T_\infty|_R = \mathtt{t}|_R \right]$$

Idée de la preuve

Montrer que pour tout $R \geq 0$ et $\mathtt{t}$:

$$\mathbb{P}\big[\, T_n|_R = \mathtt{t}|_R \,\big] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\big[\, T_\infty|_R = \mathtt{t}|_R \,\big]$$

Par récurrence sur R. Pour $\mathtt{t}$ fixé, on peut écrire $\mathtt{t}|_{R+1}$ comme la concaténation de ses sous-arbres $\mathtt{t}_1, \dots, \mathtt{t}_d$. La propriété de Markov-branchante donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[\, T_n|_{R+1} = \mathtt{t}|_{R+1} \,\big] \\ = \sum_{\sigma \in \{\text{ordres}\}} \sum_{\lambda : p(\lambda) = d} q_n(\lambda) \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}\big[\, T_{\lambda_i}|_R = \mathtt{t}_{\sigma i} \,\big]\end{aligned}$$

Idée de la preuve

Montrer que pour tout $R \geq 0$ et $\mathtt{t}$:

$$\mathbb{P}\big[\, T_n|_R = \mathtt{t}|_R \big] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\big[\, T_\infty|_R = \mathtt{t}|_R \big]$$

Par récurrence sur R. Pour $\mathtt{t}$ fixé, on peut écrire $\mathtt{t}|_{R+1}$ comme la concaténation de ses sous-arbres $\mathtt{t}_1, \ldots, \mathtt{t}_d$. La propriété de Markov-branchante donne :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big[\, T_n|_{R+1} = \mathtt{t}|_{R+1} \big] \\
&\quad = \sum_{\sigma\in\{\text{ordres}\}} \sum_{\lambda : p(\lambda)=d} q_n(\lambda) \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}\big[\, T_{\lambda_i}|_R = \mathtt{t}_{\sigma i} \big] \\
&\quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\big[\, T_\infty|_{R+1} = \mathtt{t}|_{R+1} \big]
\end{aligned}$$

1) Arbres Markov-branchants

2) Grands arbres Markov-branchants

3) Arbres de GW conditionnés
   - Limite locale
   - Volume growth

Arbres de Galton-Watson

Soit $(X_{n,i})_{n\geq 0, i\geq 1}$ une famille i.i.d. de v.a. de loi ξ sur $\mathbb{N}$.

On définit $Z_0 = 1$ et pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

On notera GW_ξ la loi de l'arbre codant ce processus.

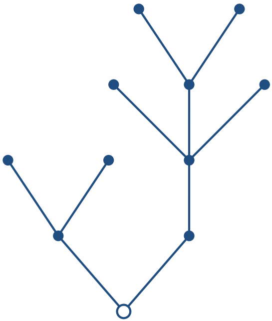

FIGURE – Arbre de GW

Arbres de Galton-Watson

Soit $(X_{n,i})_{n\geq 0, i\geq 1}$ une famille i.i.d. de v.a. de loi ξ sur $\mathbb{N}$.
On définit $Z_0 = 1$ et pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

On notera GW_ξ la loi de l'arbre codant ce processus.

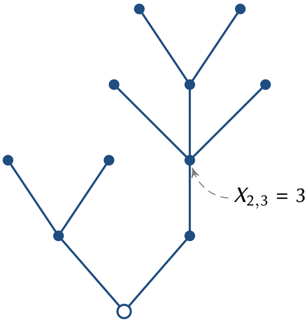

FIGURE – Arbre de GW

Arbres de Galton-Watson

Soit $(X_{n,i})_{n\geq 0, i\geq 1}$ une famille i.i.d. de v.a. de loi ξ sur $\mathbb{N}$.
On définit $Z_0 = 1$ et pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

On notera GW_ξ la loi de l'arbre codant ce processus.

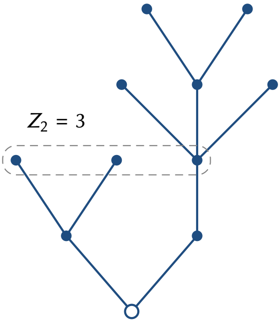

FIGURE – Arbre de GW

Arbres de GW conditionnés

Supposons que ξ soit non-dégénérée et de moyenne 1.
Soit T un arbre de loi GW_ξ. Pour tout n, notons T_n l'arbre T conditionné à avoir n nœuds.

Arbres de GW conditionnés

Supposons que ξ soit non-dégénérée et de moyenne 1.
Soit T un arbre de loi GW_ξ. Pour tout n, notons T_n l'arbre T conditionné à avoir n nœuds.
Cette suite est Markov-branchante et la suite $(q_n)_n$ associée est :

$$\forall \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathcal{P}_{n-1},$$

$$q_n(\lambda) = \#\,\text{arrangements}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)\;\xi(p)\,\frac{\prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}[\#T = \lambda_i]}{\mathbb{P}[\#T = n]}$$

Limite locale

Posons $\hat{\xi}(k) := k\xi(k)$, i.e. la mesure ξ biaisée par la taille.

Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ fixé et $L = ||\lambda|| + 1$, on a :

$$q_n(n - L, \lambda) \\ = \#\,\mathrm{arr.}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)\, \hat{\xi}(p + 1) \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}[\# T = \lambda_i] \frac{\mathbb{P}[\# T = n - L]}{\mathbb{P}[\# T = n]}$$

Limite locale

Posons $\hat{\xi}(k) := k\xi(k)$, i.e. la mesure ξ biaisée par la taille.

Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ fixé et $L = ||\lambda|| + 1$, on a :

$$q_n(n-L,\lambda) = \#\,\mathrm{arr.}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\,\hat{\xi}(p+1)\prod_{i=1}^{p}\mathbb{P}[\#T=\lambda_i]\,\overbrace{\frac{\mathbb{P}[\#T=n-L]}{\mathbb{P}[\#T=n]}}^{\substack{1\\ \uparrow\ n\to\infty}}$$

Limite locale

Posons $\hat{\xi}(k) := k\xi(k)$, i.e. la mesure ξ biaisée par la taille.
Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ fixé et $L = ||\lambda|| + 1$, on a :

$$
\begin{aligned}
&q_n(n-L, \lambda) \\
&\quad = \#\,\mathrm{arr.}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)\, \hat{\xi}(p+1) \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}[\#T = \lambda_i]\, \frac{\mathbb{P}[\#T = n-L]}{\mathbb{P}[\#T = n]} \\
&\qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} \#\,\mathrm{arr.}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)\, \hat{\xi}(p+1) \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}[\#T = \lambda_i]
\end{aligned}
$$

Limite locale

Posons $\hat{\xi}(k) := k\xi(k)$, i.e. la mesure ξ biaisée par la taille.
Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ fixé et $L = ||\lambda|| + 1$, on a :

$$\begin{aligned} & q_n(n-L, \lambda) \\ & \quad = \#\,\mathrm{arr.}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)\, \hat{\xi}(p+1) \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}[\#T = \lambda_i]\, \frac{\mathbb{P}[\#T = n-L]}{\mathbb{P}[\#T = n]} \\ & \qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} q_\infty(\infty, \lambda) \end{aligned}$$

Limite locale

Posons $\hat{\xi}(k) := k\xi(k)$, i.e. la mesure ξ biaisée par la taille.
Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ fixé et $L = ||\lambda|| + 1$, on a :

$$\begin{aligned} & q_n(n-L,\lambda) \\ & \quad = \#\,\mathrm{arr.}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\,\hat{\xi}(p+1)\prod_{i=1}^{p}\mathbb{P}[\#T=\lambda_i]\,\frac{\mathbb{P}[\#T=n-L]}{\mathbb{P}[\#T=n]} \\ & \qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} q_\infty(\infty,\lambda) \end{aligned}$$

T_n converge donc en loi vers un certain T_∞ Markov-branchant : l'arbre de Kesten.

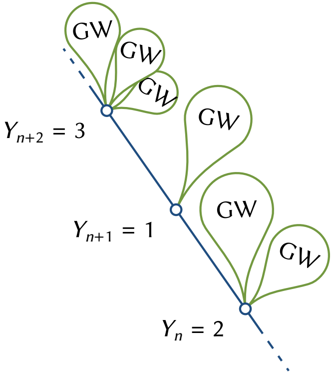

FIGURE – Arbre de kesten

Associé au processus :

$$Z_0 := 0, \quad Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} + Y_n$$

avec $(X_{n,i})$ i.i.d. de loi ξ, (Y_n) i.i.d. tels que $Y_n + 1$ suive $\hat{\xi}$.

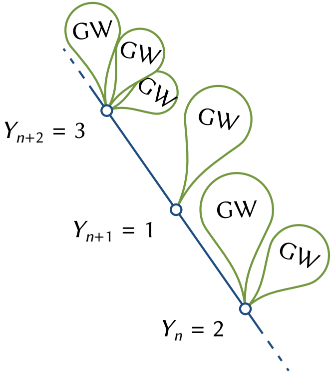

Figure – Arbre de kesten

Associé au processus :

$$Z_0 := 0, \quad Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} + Y_n$$

avec $(X_{n,i})$ i.i.d. de loi ξ, (Y_n) i.i.d. tels que $Y_n + 1$ suive $\hat{\xi}$.

Les Y_n représentent une immigration : à chaque temps n, Y_n nouveaux individus s'intègrent à la population déjà en place.

Problème

Soit $T^{(\infty)}$ un arbre de Kesten.

Questions :

- À quelle vitesse la suite $(\#T^{(\infty)}|_R)_{R\geq 1}$ croît-elle ?
- A-t-on convergence en loi de $\#T^{(\infty)}|_R \,/\, \varphi(R)$ avec φ adéquat ?

Problème

Soit $T^{(\infty)}$ un arbre de Kesten.

Questions :

- À quelle vitesse la suite $(\#T^{(\infty)}|_R)_{R\geq 1}$ croît-elle ?
- A-t-on convergence en loi de $\#T^{(\infty)}|_R \,/\, \varphi(R)$ avec φ adéquat ?

Idée : Étudier l'arbre $T^{(\infty)}$ à une "bonne" échelle.

Problème

Soit $T^{(\infty)}$ un arbre de Kesten.

Questions :

- À quelle vitesse la suite $(\#T^{(\infty)}|_R)_{R\geq 1}$ croît-elle ?
- A-t-on convergence en loi de $\#T^{(\infty)}|_R \,/\, \varphi(R)$ avec φ adéquat ?

Idée : Étudier l'arbre $T^{(\infty)}$ à une “bonne” échelle.

D'après Haas-Miermont : hauteur $\sim$ (masse)$^{\gamma}$.

Problème

Soit $T^{(\infty)}$ un arbre de Kesten.

Questions :

– À quelle vitesse la suite $(\#T^{(\infty)}|_R)_{R\geq 1}$ croît-elle ?
– A-t-on convergence en loi de $\#T^{(\infty)}|_R \,/\, \varphi(R)$ avec φ adéquat ?

Idée : Étudier l'arbre $T^{(\infty)}$ à une “bonne” échelle.

D'après Haas-Miermont : hauteur $\sim$ (masse)$^\gamma$. Un bon candidat pour la vitesse est donc $R^{1/\gamma}$.

Limite d'échelle

On suppose maintenant que $\xi(0) = \xi(2) = 1/2$.
On a :

$$n^{1/2}(1 - s_1)\,\bar{q}_n(\mathrm{d}\,\mathbf{s}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1 - s_1)\,\nu_B(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$$

où ν_B est la mesure de dislocation brownienne : $\nu_B(s_1 + s_2 < 1) = 0$ et $\nu_B(s_1 \in \mathrm{d}\,x) = \left[\pi x^3 (1 - x)^3\right]^{-1/2} \mathrm{d}\,x$.

Limite d'échelle

On suppose maintenant que $\xi(0) = \xi(2) = 1/2$.
On a :

$$n^{1/2}(1 - s_1)\, \bar{q}_n(\mathrm{d}\,\mathbf{s}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1 - s_1)\, \nu_B(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$$

où ν_B est la mesure de dislocation brownienne : $\nu_B(s_1 + s_2 < 1) = 0$ et $\nu_B(s_1 \in \mathrm{d}\,x) = \left[\pi x^3 (1 - x)^3\right]^{-1/2} \mathrm{d}\,x$.

De ce fait :

$$\frac{1}{n^{1/2}} T_n \xRightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{T}_{1/2,\nu_B}$$

Limite d'échelle

On suppose maintenant que $\xi(0) = \xi(2) = 1/2$.
On a :

$$n^{1/2}(1 - s_1)\, \bar{q}_n(\mathrm{d}\, \mathbf{s}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1 - s_1)\, \nu_B(\mathrm{d}\, \mathbf{s})$$

où ν_B est la mesure de dislocation brownienne : $\nu_B(s_1 + s_2 < 1) = 0$ et $\nu_B(s_1 \in \mathrm{d}\, x) = \left[\pi x^3 (1 - x)^3\right]^{-1/2} \mathrm{d}\, x$.

De ce fait :

$$\frac{1}{n^{1/2}} T_n \xRightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{T}_B$$

où $\mathcal{T}_B$ est l'arbre brownien.

Arbre brownien avec immigration

Soit I_B la mesure d'immigration brownienne, i.e. la mesure sur $\mathbb{R}_+$ donnée par $I_B(\mathrm{d}\,s) = (\pi\, s^3/2)^{-1/2}\,\mathrm{d}\,s$.

Arbre brownien avec immigration

Soit I_B la mesure d'immigration brownienne, i.e. la mesure sur $\mathbb{R}_+$ donnée par $I_B(\mathrm{d}\, s) = (\pi s^3/2)^{-1/2}\, \mathrm{d}\, s$.

Soit Σ un PPP sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $\mathrm{d}\, u \otimes I_B(\mathrm{d}\, s)$ et notons $\{(u_i, s_i); i \geq 1\}$ ses atomes.

Arbre brownien avec immigration

Soit I_B la mesure d'immigration brownienne, i.e. la mesure sur $\mathbb{R}_+$ donnée par $I_B(\mathrm{d}\, s) = (\pi s^3/2)^{-1/2}\, \mathrm{d}\, s$.

Soit Σ un PPP sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $\mathrm{d}\, u \otimes I_B(\mathrm{d}\, s)$ et notons $\{(u_i, s_i); i \geq 1\}$ ses atomes.

Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\geq 1}$ une famille i.i.d. et indépendante de Σ d'arbres browniens.

Arbre brownien avec immigration

Soit I_B la mesure d'immigration brownienne, i.e. la mesure sur $\mathbb{R}_+$ donnée par $I_B(\mathrm{d}\,s) = (\pi s^3/2)^{-1/2}\,\mathrm{d}\,s$.

Soit Σ un PPP sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $\mathrm{d}\,u \otimes I_B(\mathrm{d}\,s)$ et notons $\{(u_i, s_i); i \geq 1\}$ ses atomes.

Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\geq 1}$ une famille i.i.d. et indépendante de Σ d'arbres browniens. Pour tout i, on pose $\mathcal{T}_i^{(s_i)}$ l'arbre $\mathcal{T}_i$ avec masse s_i.

Arbre brownien avec immigration

Soit I_B la mesure d'immigration brownienne, i.e. la mesure sur $\mathbb{R}_+$ donnée par $I_B(\mathrm{d}\,s) = (\pi\, s^3/2)^{-1/2}\,\mathrm{d}\,s$.

Soit Σ un PPP sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $\mathrm{d}\,u \otimes I_B(\mathrm{d}\,s)$ et notons $\{(u_i, s_i); i \geq 1\}$ ses atomes.

Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\geq 1}$ une famille i.i.d. et indépendante de Σ d'arbres browniens. Pour tout i, on pose $\mathcal{T}_i^{(s_i)}$ l'arbre $\mathcal{T}_i$ avec masse s_i. On définit alors :

$$\Pi := \sum_{i\geq 1} \delta_{(u_i, s_i, \mathcal{T}_i^{(s_i)})}$$

C'est un PPP sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}_c$.

Arbre brownien avec immigration

Soit I_B la mesure d'immigration brownienne, i.e. la mesure sur $\mathbb{R}_+$ donnée par $I_B(\mathrm{d}\,s) = (\pi s^3/2)^{-1/2}\,\mathrm{d}\,s$.

Soit Σ un PPP sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $\mathrm{d}\,u \otimes I_B(\mathrm{d}\,s)$ et notons $\{(u_i, s_i); i \geq 1\}$ ses atomes.

Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\geq 1}$ une famille i.i.d. et indépendante de Σ d'arbres browniens. Pour tout i, on pose $\mathcal{T}_i^{(s_i)}$ l'arbre $\mathcal{T}_i$ avec masse s_i. On définit alors :

$$\Pi := \sum_{i\geq 1} \delta_{(u_i, s_i, \mathcal{T}_i^{(s_i)})}$$

C'est un PPP sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}_c$.

Il est associé à un arbre de fragmentation avec immigration : $\mathcal{T}_{B,\mathrm{imm}}$.

Processus ponctuels sous-jacents

De par sa construction, $T^{(\infty)}$ est associé à un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}_c$:

$$\sum_{n \geq 0} \delta_{(n, \Lambda_n, T_n)}$$

où les Λ_n sont i.i.d. de loi q_* et T_n suit $\mathrm{MB}^q_{\Lambda_n}$.

Processus ponctuels sous-jacents

De par sa construction, $T^{(\infty)}$ est associé à un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}_c$:

$$\sum_{n \geq 0} \delta_{(n, \Lambda_n, T_n)}$$

où les Λ_n sont i.i.d. de loi q_* et T_n suit $\mathrm{MB}^q_{\Lambda_n}$.

Si on passe à l'échelle :

– $1/R$ pour les distances – $1/R^2$ pour la masse

Processus ponctuels sous-jacents

De par sa construction, $T^{(\infty)}$ est associé à un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}_c$:

$$\sum_{n\geq 0} \delta_{(n,\Lambda_n,T_n)}$$

où les Λ_n sont i.i.d. de loi q_* et T_n suit $\mathrm{MB}^q_{\Lambda_n}$.

Si on passe à l'échelle :

– $1/R$ pour les distances – $1/R^2$ pour la masse

l'arbre $(1/R, 1/R^2) * T^{(\infty)} =: T^{(R)}$ est associé au processus ponctuel :

$$\Pi_R := \sum_{n\geq 0} \delta_{\left(n/R,\Lambda_n/R^2,(1/R,1/R^2)*T_n\right)}$$

Remise à l'échelle de l'immigration

Λ a la même loi que $\#T$ avec T de loi GW_ξ.

Remise à l'échelle de l'immigration

Λ a la même loi que $\#T$ avec T de loi GW_ξ. En utilisant la formule d'Otter-Dwass :

$$\mathbb{P}\big[\Lambda = n\big] = \mathbb{P}\big[\#T = n\big]$$

Remise à l'échelle de l'immigration

Λ a la même loi que $\#T$ avec T de loi GW_ξ. En utilisant la formule d'Otter-Dwass :

$$\mathbb{P}\left[\Lambda = n\right] = \frac{1}{n}\mathbb{P}[S_n - n = -1]$$

Remise à l'échelle de l'immigration

Λ a la même loi que $\#T$ avec T de loi GW_ξ. En utilisant la formule d'Otter-Dwass :

$$\mathbb{P}[\Lambda = n] = \frac{1}{n}\mathbb{P}[S_n - n = -1] \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi n^3}}$$

Remise à l'échelle de l'immigration

Λ a la même loi que $\#T$ avec T de loi GW_ξ. En utilisant la formule d'Otter-Dwass :

$$\mathbb{P}\left[\Lambda = n\right] = \frac{1}{n}\mathbb{P}[S_n - n = -1] \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi n^3}}$$

D'où pour toute f continue avec $0 \leq f(x) \leq 1 \wedge x$:

$$R\,\mathbb{E}\left[f(\Lambda/R^2)\right] \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_0^\infty \sqrt{\frac{1}{2\pi s^3}} f(s)\, \mathrm{d}s$$

Remise à l'échelle de l'immigration

Λ a la même loi que $\#T$ avec T de loi GW_ξ. En utilisant la formule d'Otter-Dwass :

$$\mathbb{P}[\Lambda = n] = \frac{1}{n}\mathbb{P}[S_n - n = -1] \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi n^3}}$$

D'où pour toute f continue avec $0 \leq f(x) \leq 1 \wedge x$:

$$R\,\mathbb{E}\left[f(\Lambda/R^2)\right] \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_0^\infty f(s)\, I_B(\mathrm{d}\, s)$$

Volume growth

On déduit alors que :

$$\Pi_R \xrightarrow[R\to\infty]{\mathcal{L}} \Pi$$

Volume growth

On déduit alors que :

$$\Pi_R \xrightarrow[R\to\infty]{\mathcal{L}} \Pi$$

Puis que :

$$(1/R, 1/R^2) * T^{(\infty)} \xrightarrow[R\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{T}_{B,\mathrm{imm}}$$

Volume growth

On déduit alors que :

$$\Pi_R \xrightarrow[R\to\infty]{\mathcal{L}} \Pi$$

Puis que :

$$(1/R, 1/R^2) * T^{(\infty)} \xrightarrow[R\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{T}_{B,\mathrm{imm}}$$

Et alors :

$$\frac{\# T^{(\infty)}|_R}{R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{\mathcal{L}} \mathrm{masse}\left(\mathcal{T}_{B,\mathrm{imm}}|_1\right)$$

Cas général

Soit Λ de loi q_*, I une mesure d'immigration sur $\ell_1^{\downarrow}$.

Cas général

Soit Λ de loi q_*, I une mesure d'immigration sur $\ell_1^{\downarrow}$.
Supposons que $n^{\gamma}(1-s_1)\,\bar{q}_n(\mathrm{d}\,\mathbf{s}) \Rightarrow (1-s_1)\,\nu(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$

Cas général

Soit Λ de loi q_*, I une mesure d'immigration sur $\ell_1^\downarrow$.
Supposons que $n^\gamma(1-s_1)\,\bar{q}_n(\mathrm{d}\,\mathbf{s}) \Rightarrow (1-s_1)\,\nu(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$ et que pour toute fonction continue f, $f(\mathbf{s}) \leq 1 \wedge \|\mathbf{s}\|$:

$$R\,\mathbb{E}\big[f(\Lambda/R^{1/\gamma})\big] \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{\ell_1^\downarrow} f(\mathbf{s})\, I(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$$

Cas général

Soit Λ de loi q_*, I une mesure d'immigration sur $\ell_1^\downarrow$.
Supposons que $n^\gamma(1-s_1)\,\bar{q}_n(\mathrm{d}\,\mathbf{s}) \Rightarrow (1-s_1)\,\nu(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$ et que pour toute fonction continue f, $f(\mathbf{s}) \leq 1 \wedge \|\mathbf{s}\|$:

$$R\,\mathbb{E}\big[f(\Lambda/R^{1/\gamma})\big] \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{\ell_1^\downarrow} f(\mathbf{s})\, I(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$$

alors $\Pi_R \to \Pi$ en loi.

Cas général

Soit Λ de loi q_*, I une mesure d'immigration sur $\ell_1^\downarrow$.
Supposons que $n^\gamma(1-s_1)\,\bar{q}_n(\mathrm{d}\,\mathbf{s}) \Rightarrow (1-s_1)\,\nu(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$ et que pour toute fonction continue f, $f(\mathbf{s}) \leq 1 \wedge ||\mathbf{s}||$:

$$R\,\mathbb{E}\big[f(\Lambda/R^{1/\gamma})\big] \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{\ell_1^\downarrow} f(\mathbf{s})\,I(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$$

alors $\Pi_R \to \Pi$ en loi.

Théorème (P.)

Alors : $$(1/R, 1/R^{1/\gamma}) * T \xrightarrow[R\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{T}_{\gamma,\nu}^{(I)}$$

Cas général

Soit Λ de loi q_*, I une mesure d'immigration sur $\ell_1^{\downarrow}$.
Supposons que $n^{\gamma}(1-s_1)\,\bar{q}_n(\mathrm{d}\,\mathbf{s}) \Rightarrow (1-s_1)\,\nu(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$ et que pour toute fonction continue f, $f(\mathbf{s}) \leq 1 \wedge \|\mathbf{s}\|$:

$$R\,\mathbb{E}\big[f(\Lambda/R^{1/\gamma})\big] \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{\ell_1^{\downarrow}} f(\mathbf{s})\, I(\mathrm{d}\,\mathbf{s})$$

alors $\Pi_R \to \Pi$ en loi.

Théorème (P.)

Alors : $$(1/R, 1/R^{1/\gamma}) * T \xrightarrow[R\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{T}_{\gamma,\nu}^{(I)}$$

Et : $$\frac{\#T|_R}{R^{1/\gamma}} \xrightarrow[R\to\infty]{\mathcal{L}} \text{masse}\left(\mathcal{T}_{\gamma,\nu}^{(I)}|_1\right)$$

Merci pour
votre attention !

- Bénédicte Haas and Grégory Miermont. Scaling limits of Markov branching trees with applications to Galton–Watson and random unordered trees. 2012.
- Jean Bertoin. Self-similar fragmentations. 2002.
- Romain Abraham, Jean-François Delmas, and Patrick Hoscheit. A note on the Gromov-Hausdorff-Prokhorov distance between (locally) compact metric measure spaces. 2013.
- Bénédicte Haas. Equilibrium for fragmentation with immigration. 2005.
- Romain Abraham and Jean-François Delmas. Local limits of conditioned Galton-Watson trees : the infinite spine case. 2014.