Processus de contact avec vieillissement

Aurelia Deshayes

sous la direction d'Olivier Garet et Régine Marchand
Institut Elie Cartan - Université de Lorraine

Jeunes Probabilistes et Statisticiens
Forges-Les-Eaux
10 avril 2014

Processus de contact

Définition

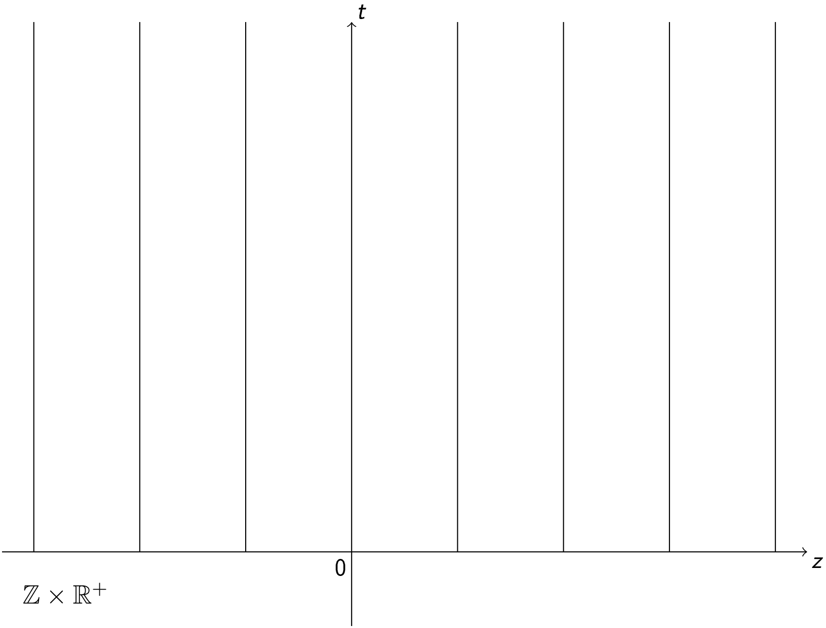
Un processus de contact $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Soit $z \in \mathbb{Z}^d$:

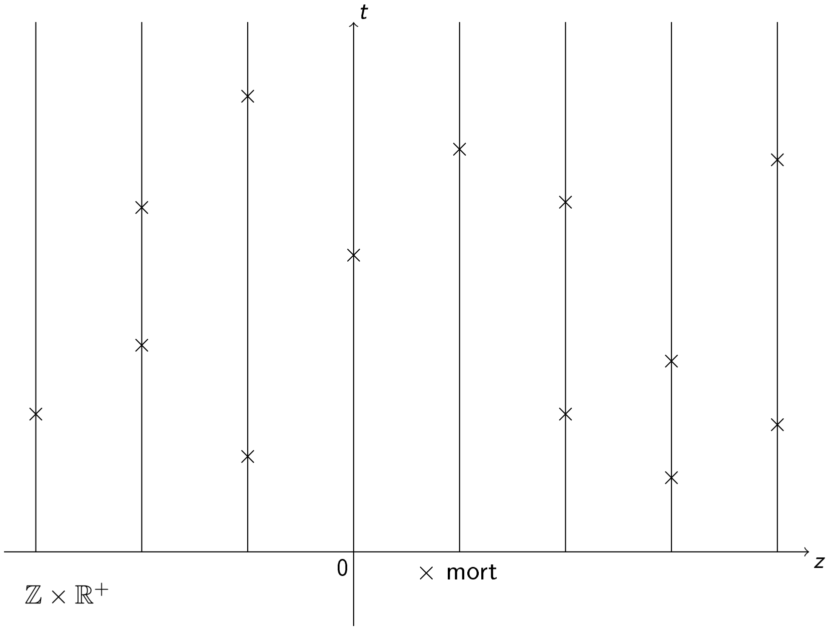
- z est mort (ou sain) si $\xi_t(z) = 0$.
- z est vivant (ou infecté) si $\xi_t(z) = 1$.

L'évolution du système est :

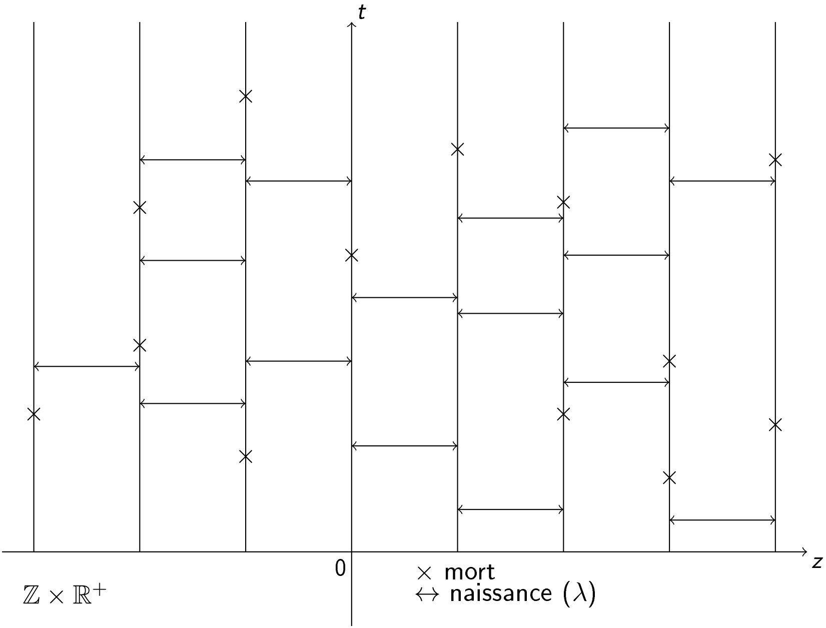
- un site vivant meurt avec un taux 1,
- un site mort naît avec un taux dépendant de son nombre de voisins vivants,

L'état initial ξ_0 du processus est un ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, souvent $\{0\}$.

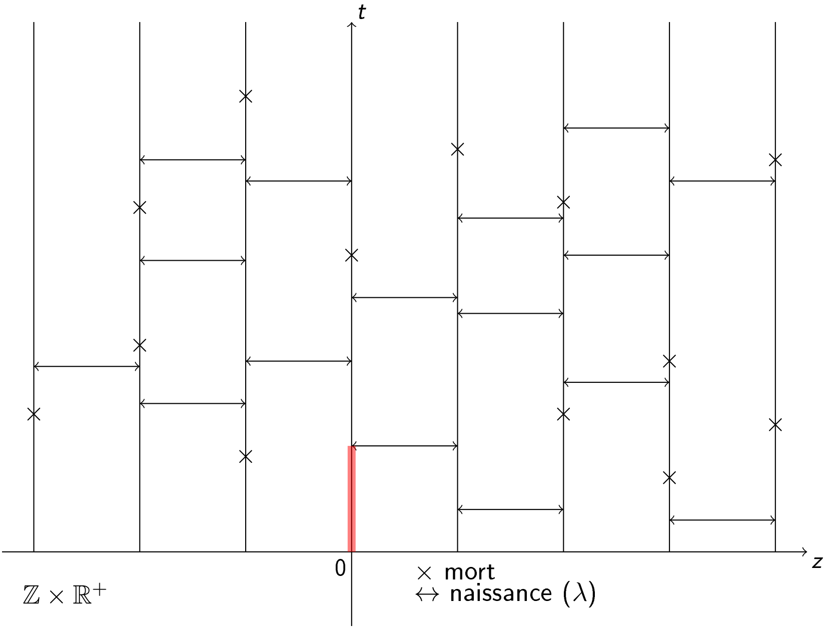

t
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



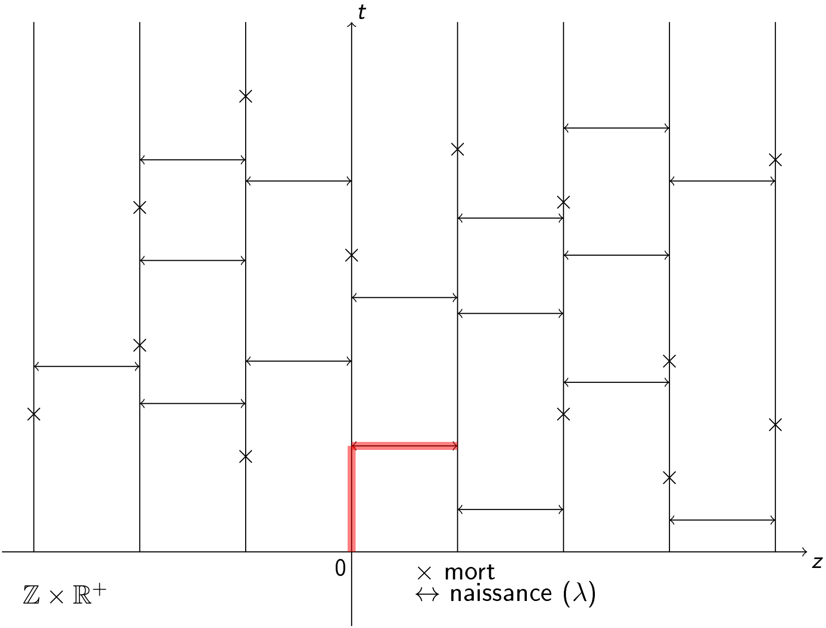
t
z
0
× mort
ℤ × ℝ⁺



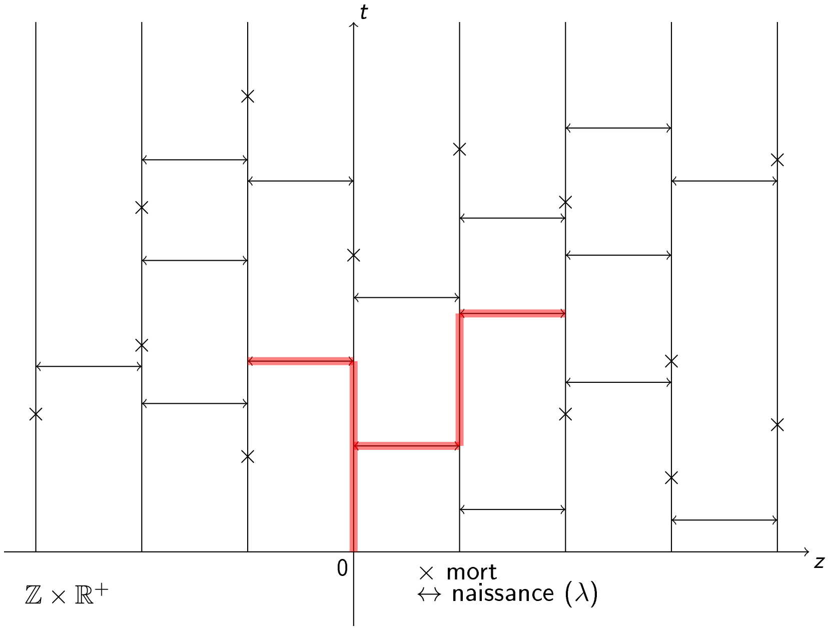
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



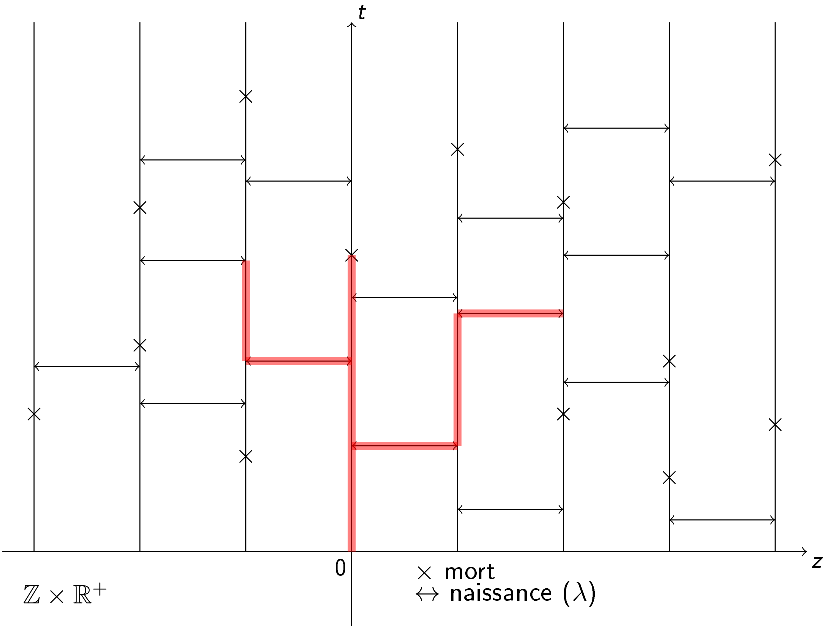
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



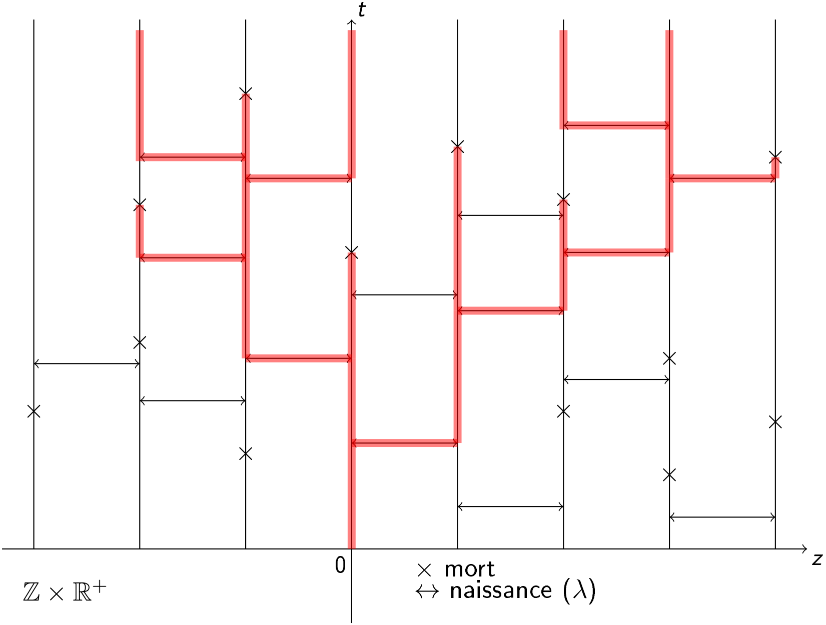
t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
ℤ × ℝ⁺



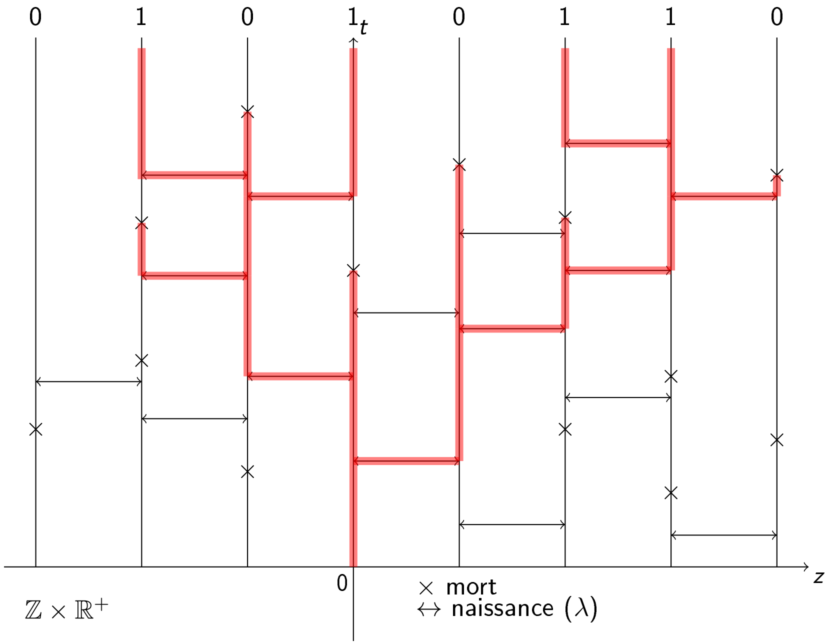
t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
ℤ × ℝ⁺



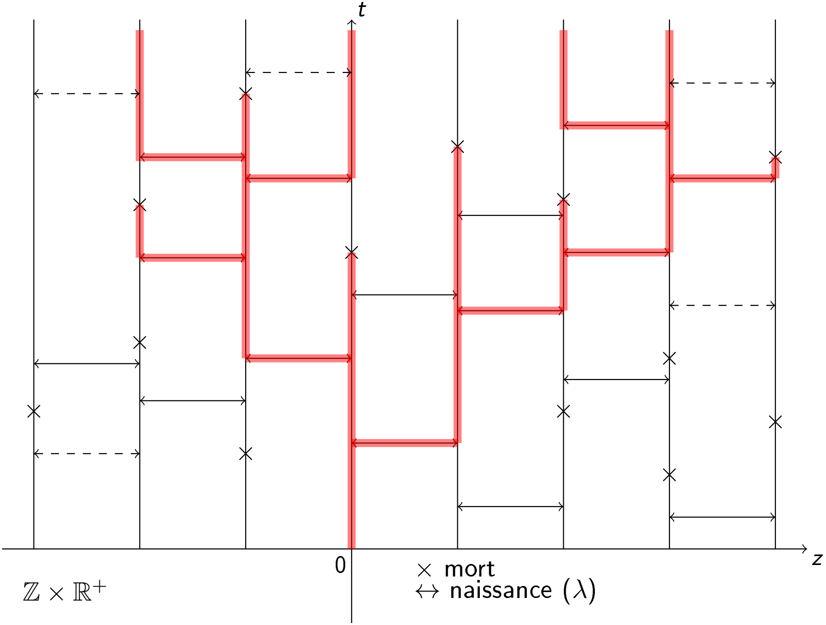
t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



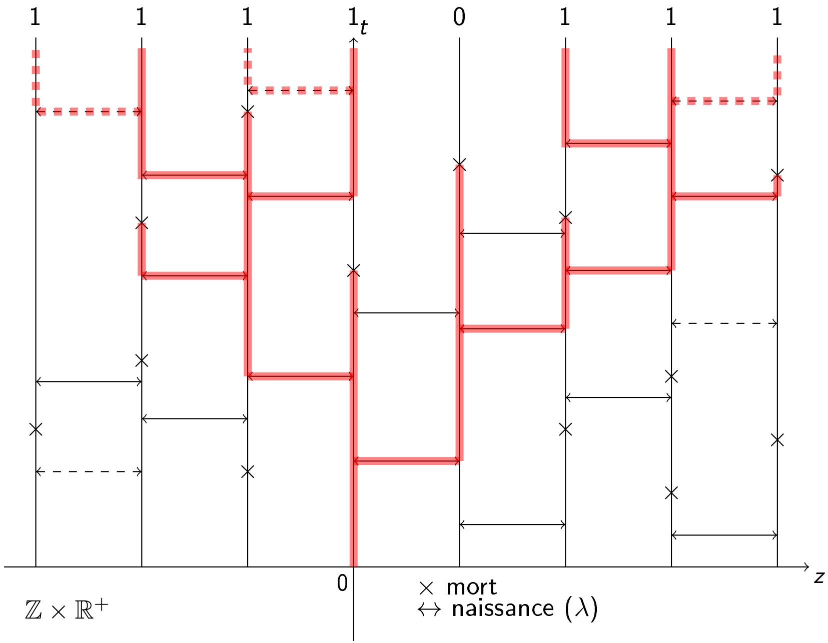
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



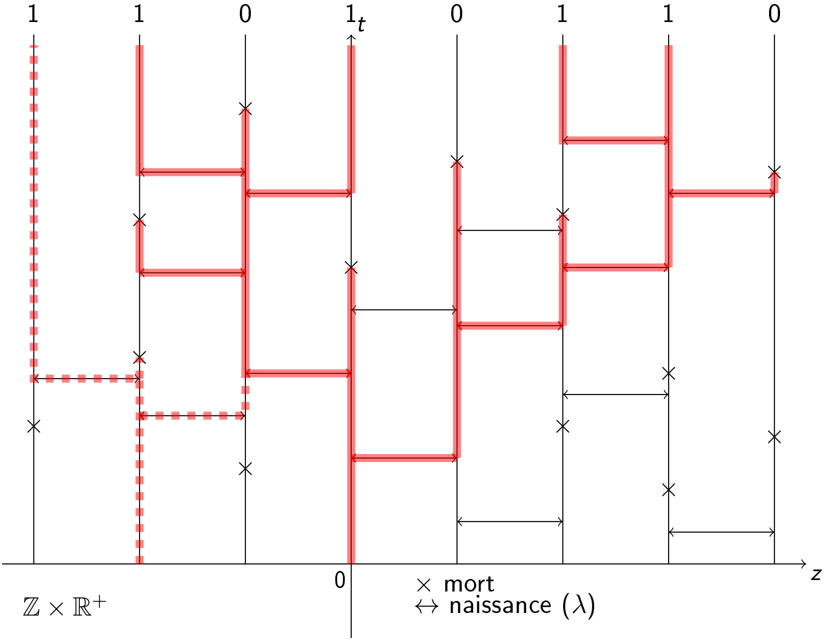
0 1 0 1 0 1 1 0
t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
ℤ × ℝ⁺



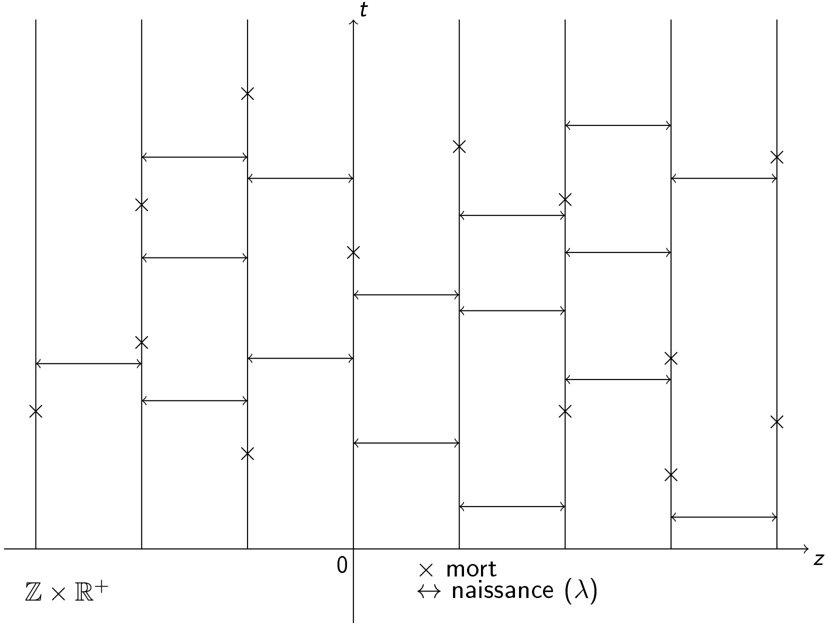
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{+}$

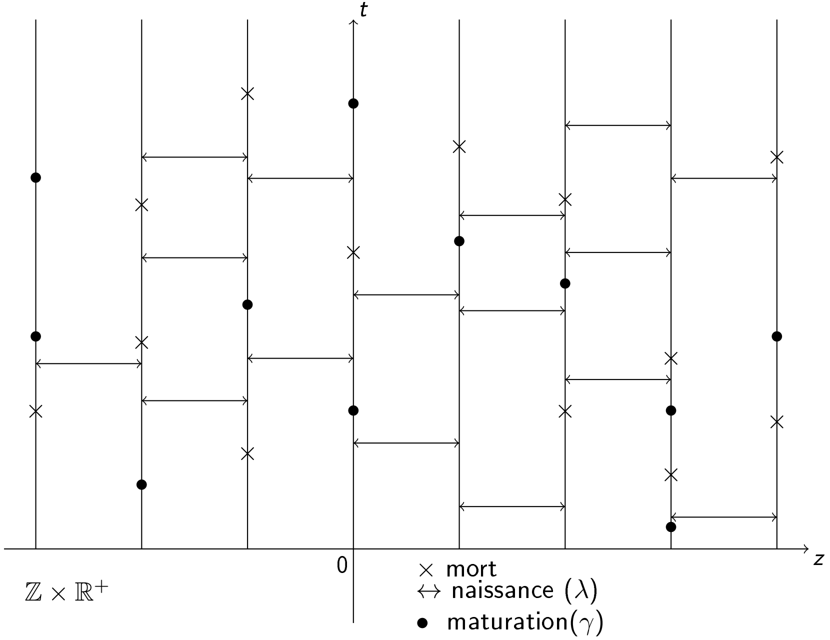


1 1 1 1 0 1 1 1
t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

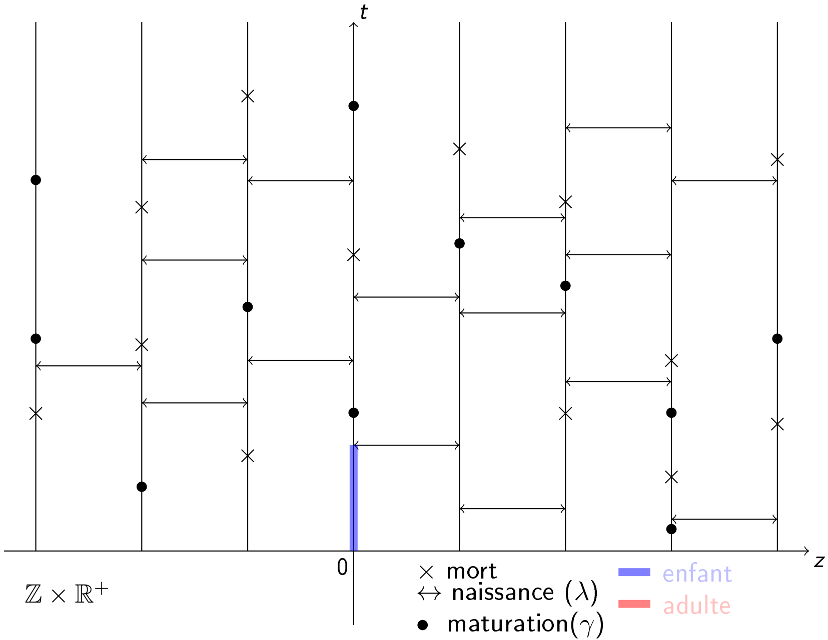


1 1 0 1 0 1 1 0
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

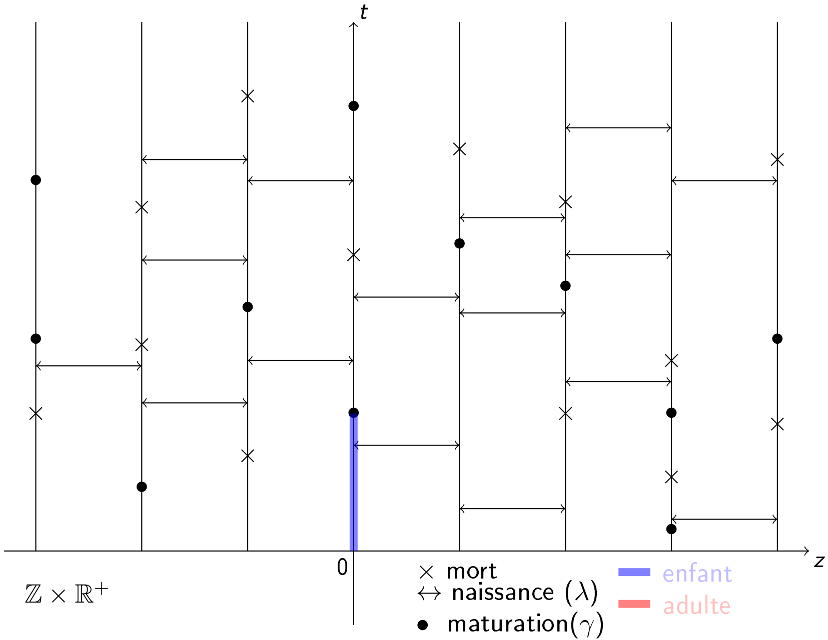

t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



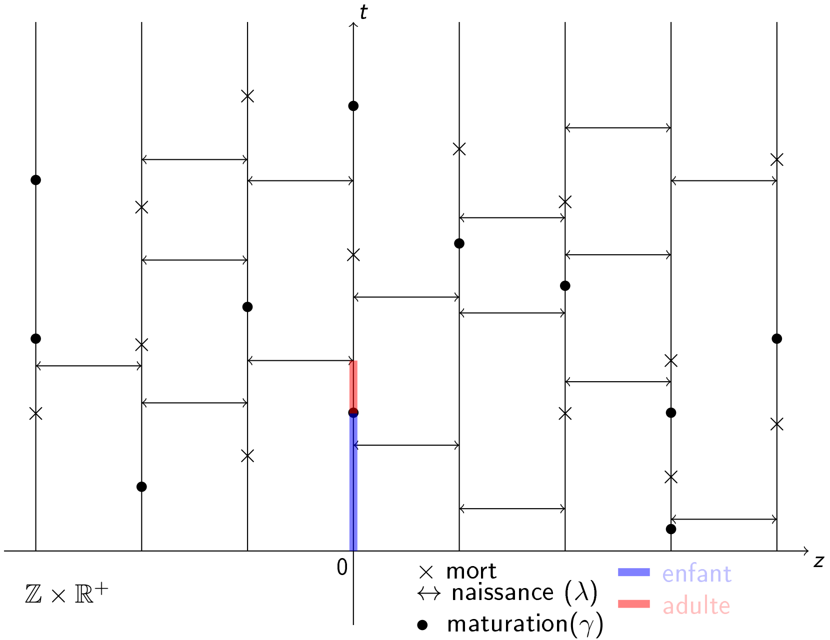
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\bullet$ maturation(γ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



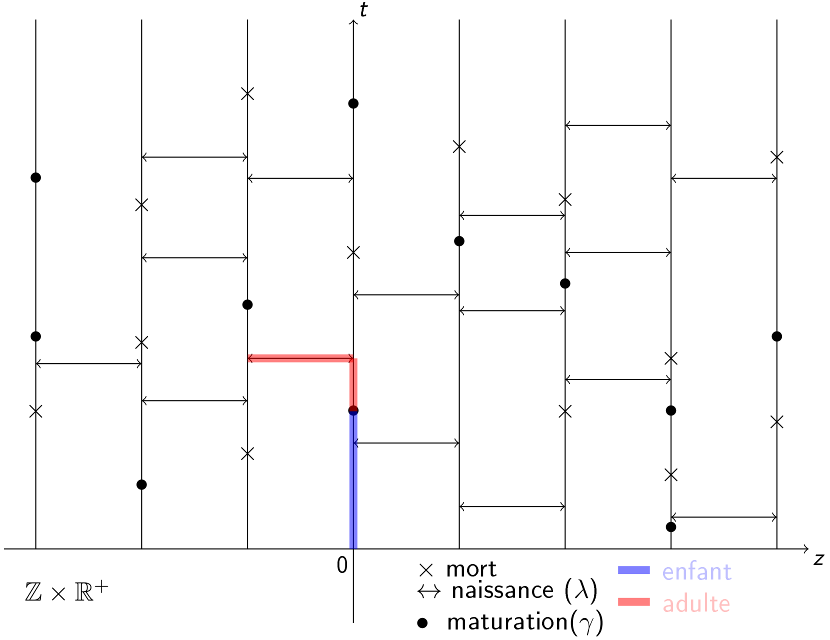
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\bullet$ maturation(γ)
enfant
adulte

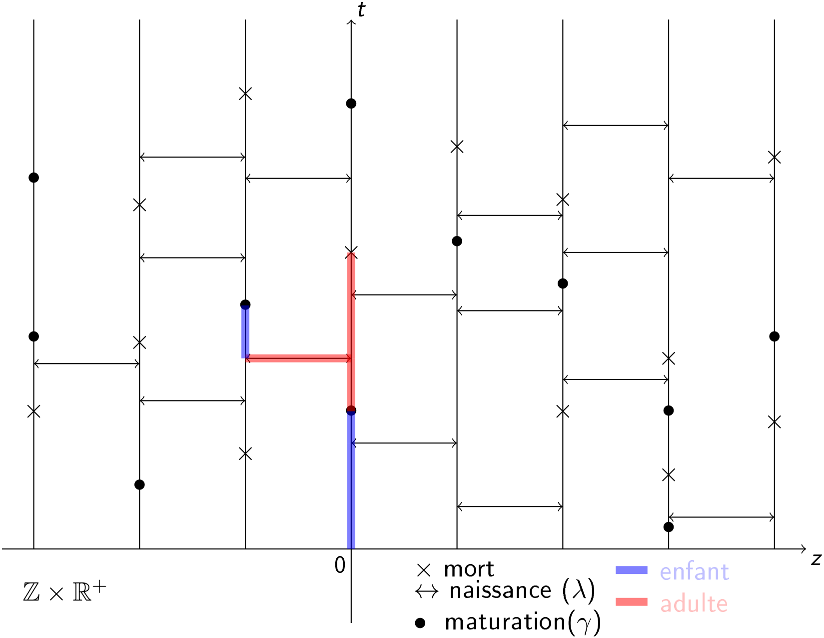


t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte

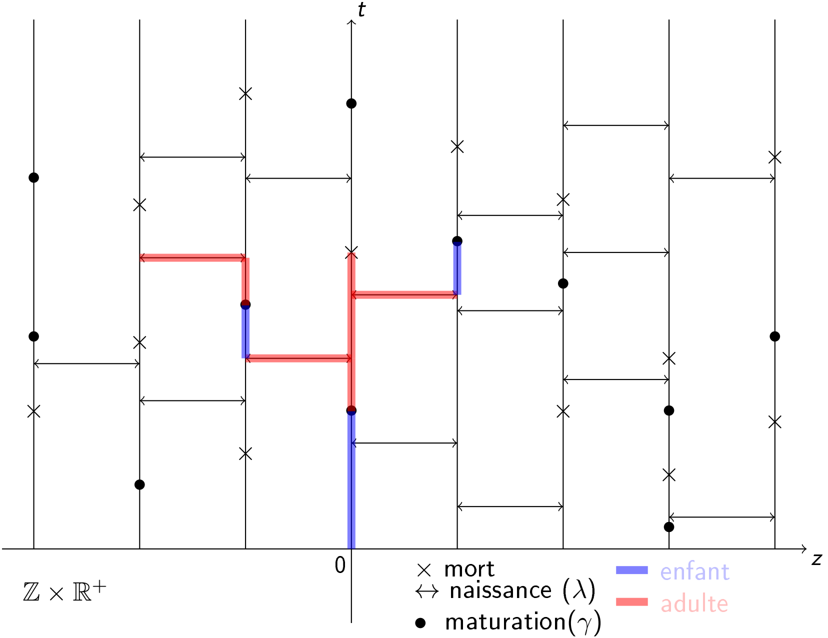


t
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte

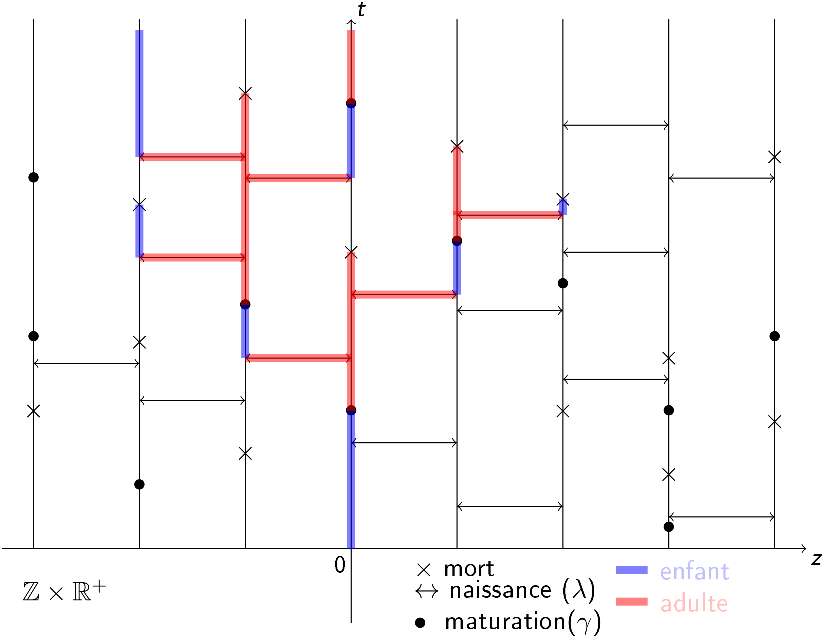

t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte



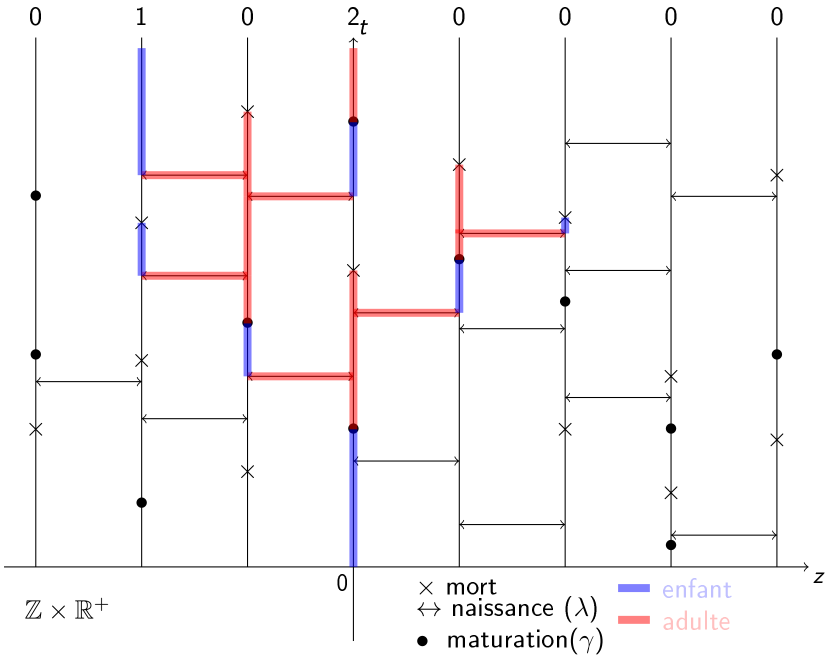
t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

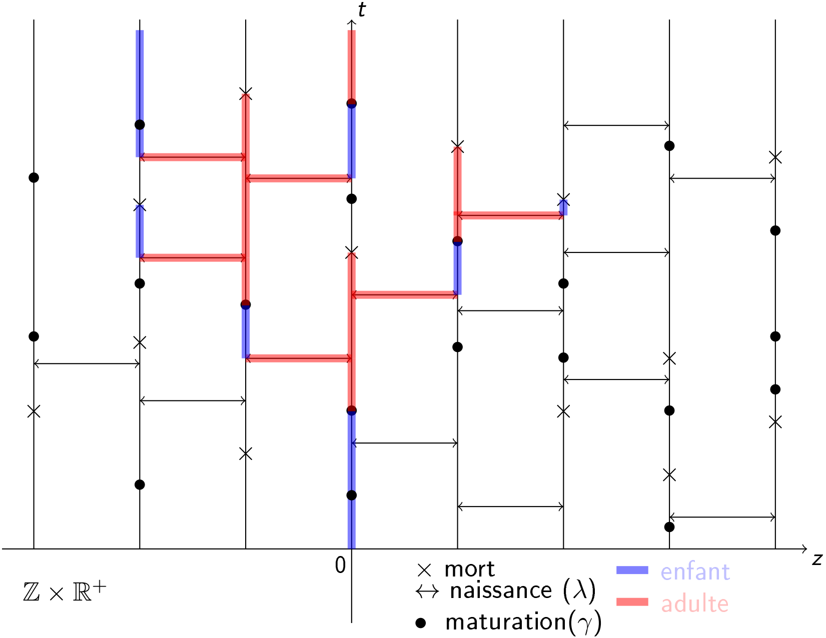


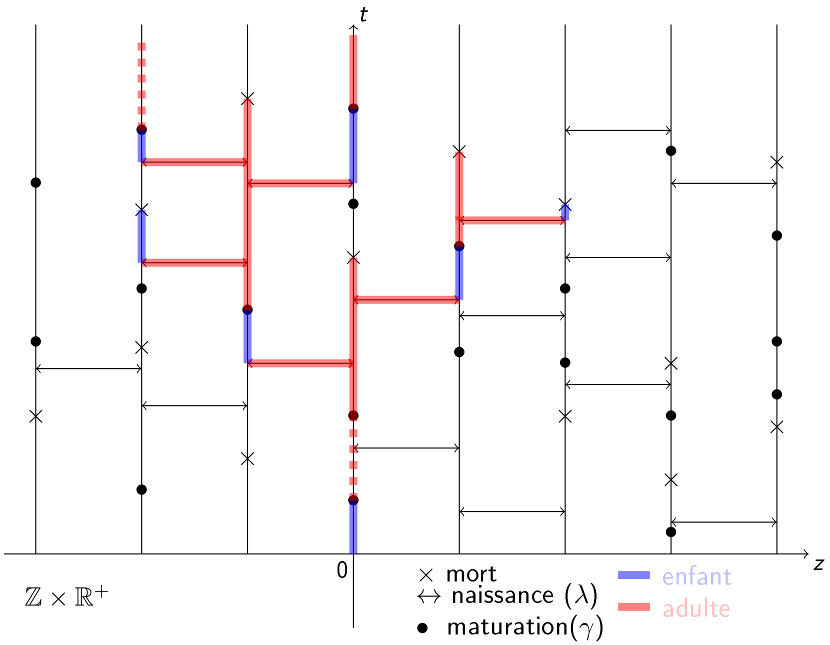
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
● maturation(γ)
enfant
adulte



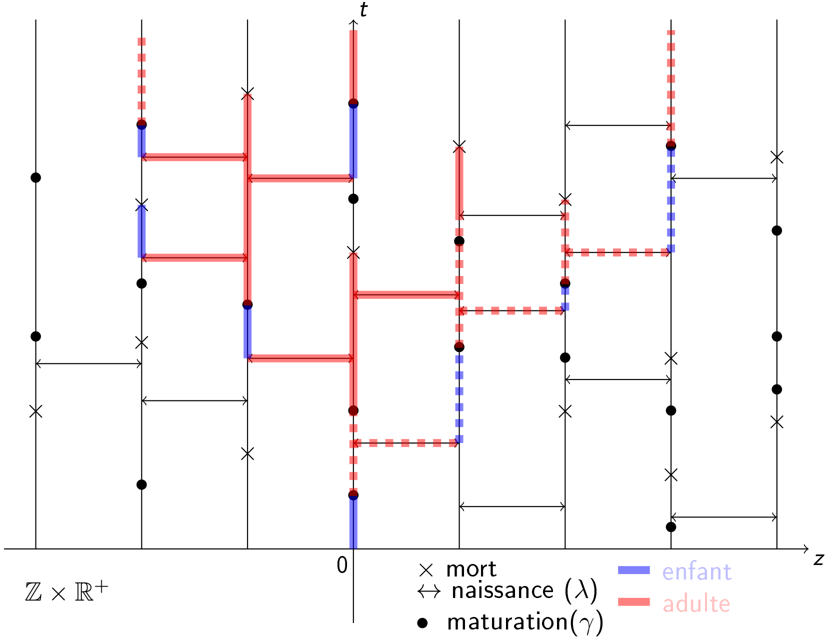
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\bullet$ maturation(γ)
enfant
adulte


0
1
0
2
0
0
0
0
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\bullet$ maturation(γ)
enfant
adulte

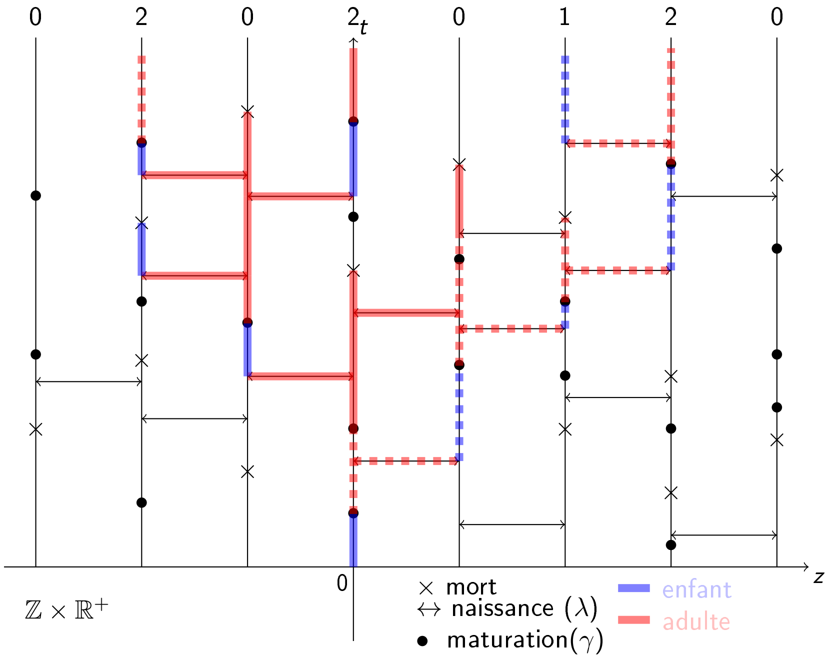

t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte



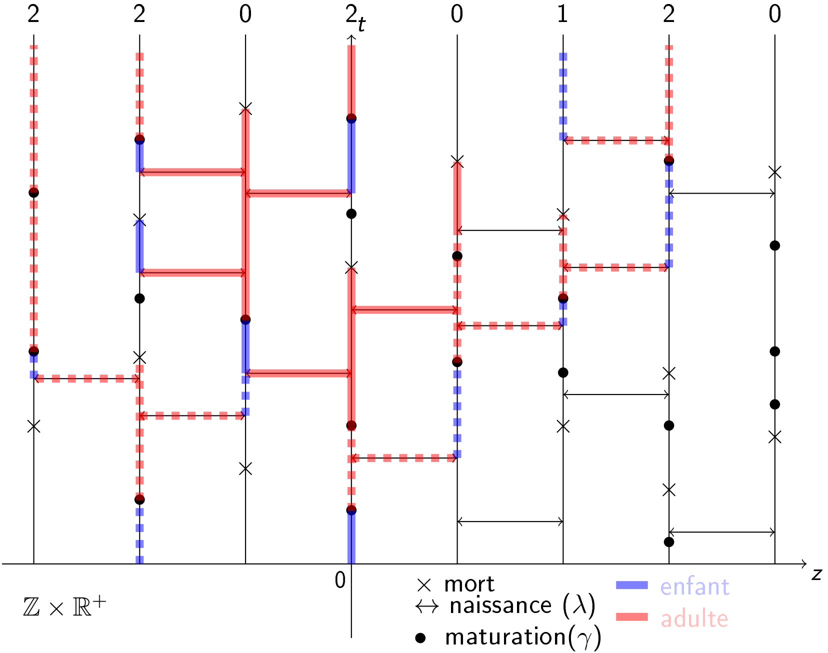
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\bullet$ maturation(γ)
enfant
adulte
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

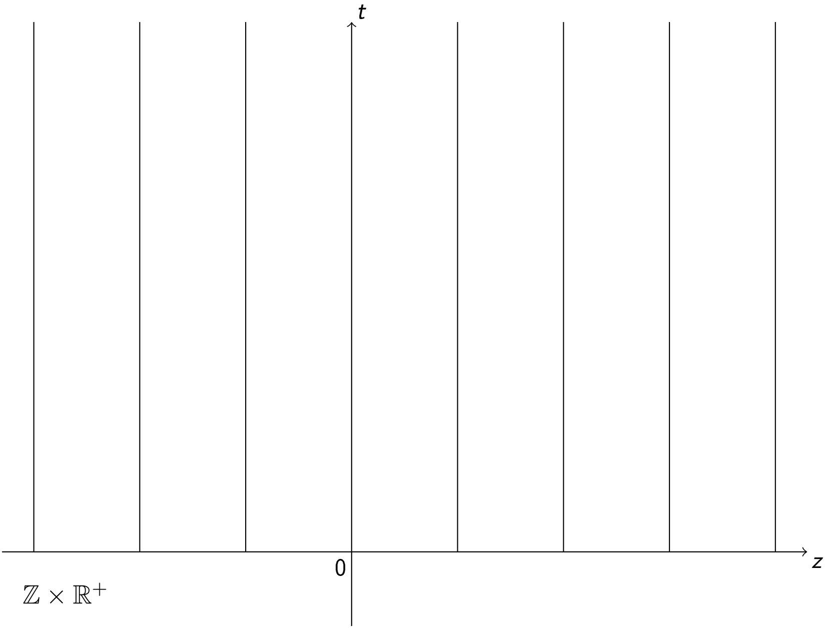


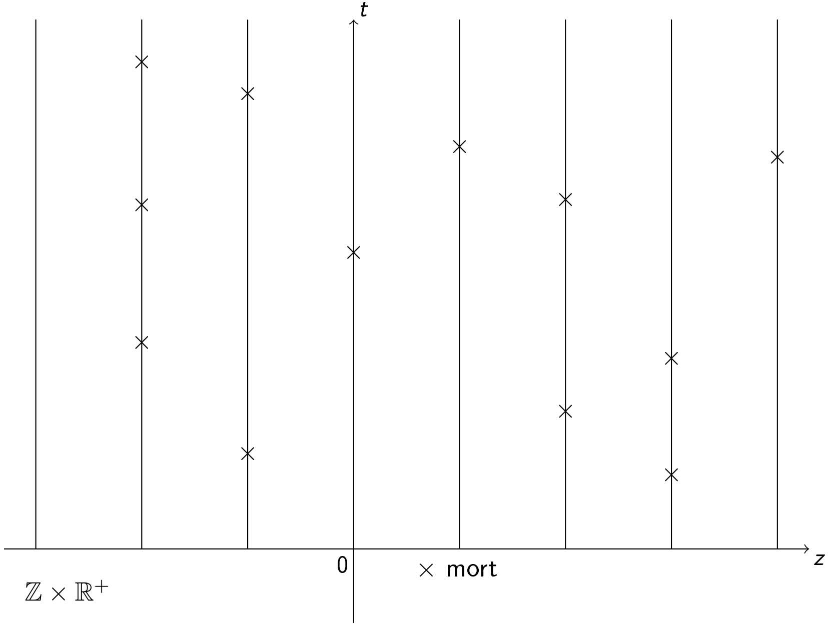
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
● maturation(γ)
enfant
adulte



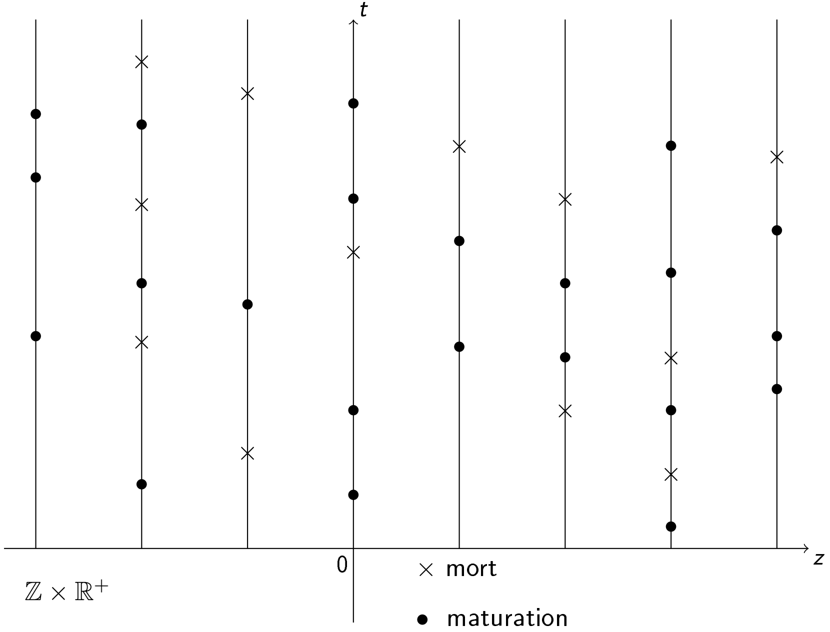
0
2
0
2
t
0
1
2
0
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte

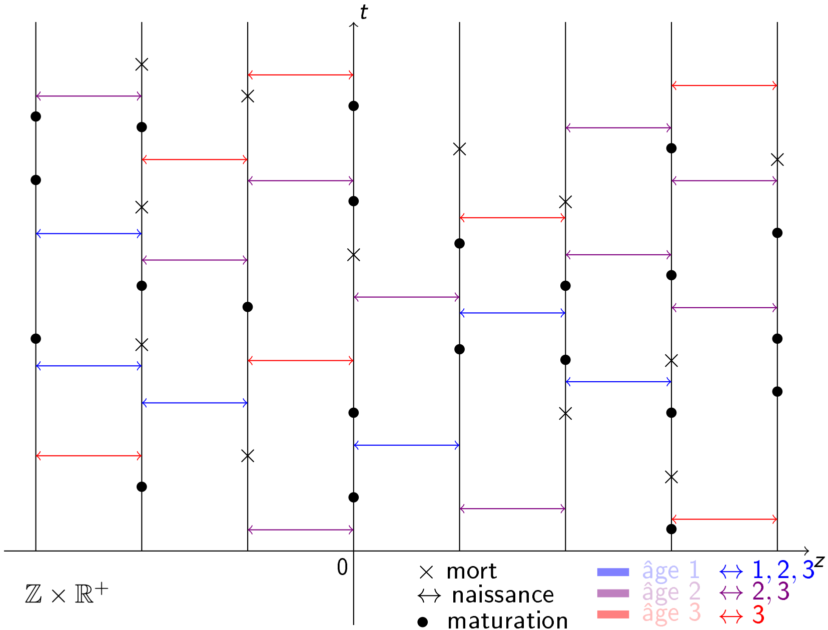

2 2 0 2 0 1 2 0
t
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte

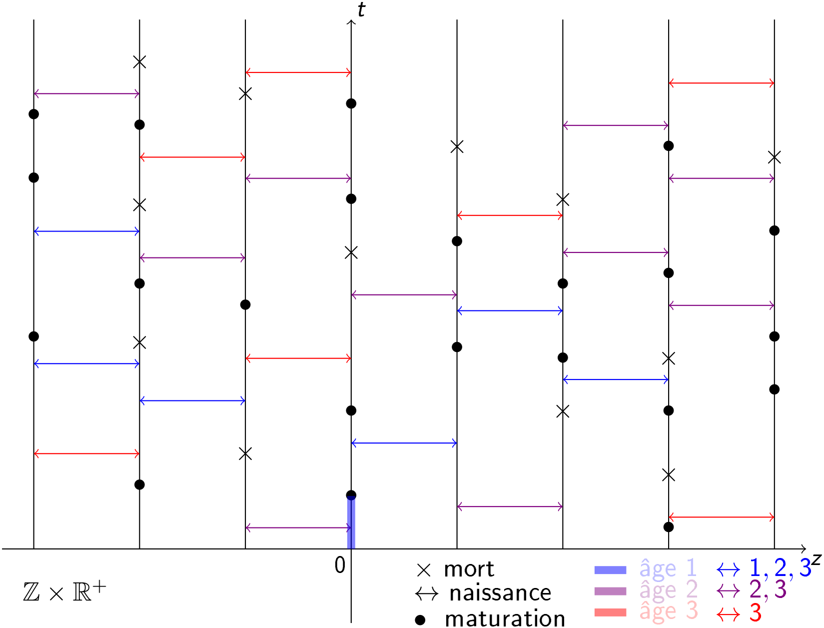

t
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



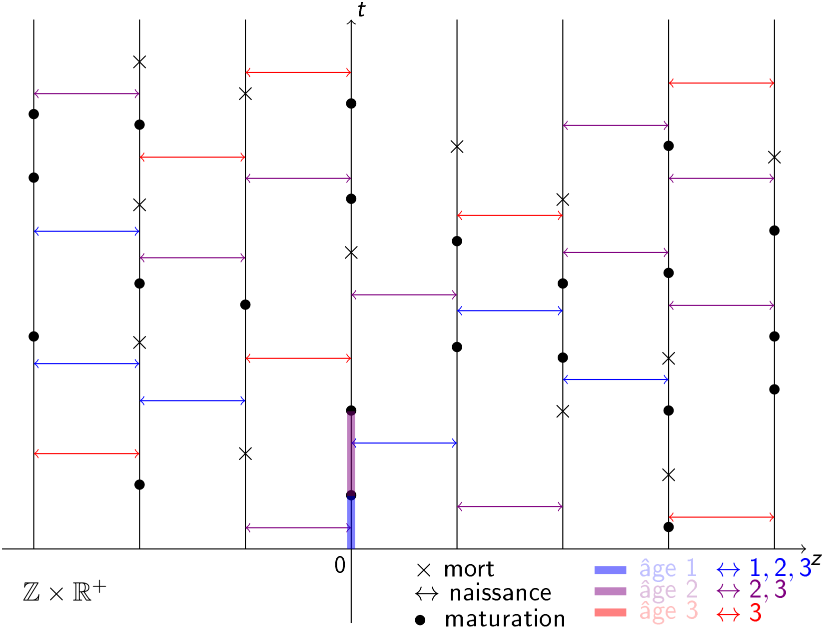
t
0
z
$\times$ mort
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$


t
z
0
$\times$ mort
$\bullet$ maturation
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

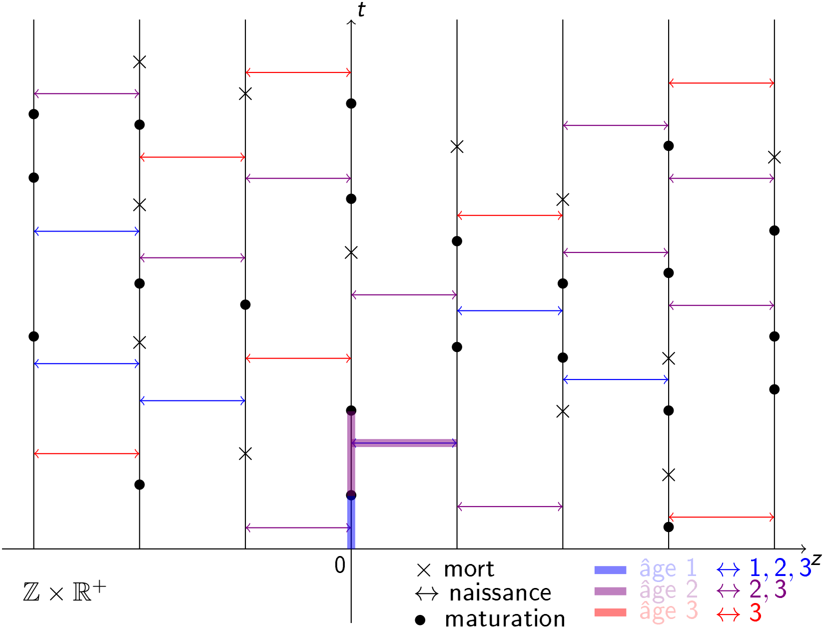

t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
● maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3

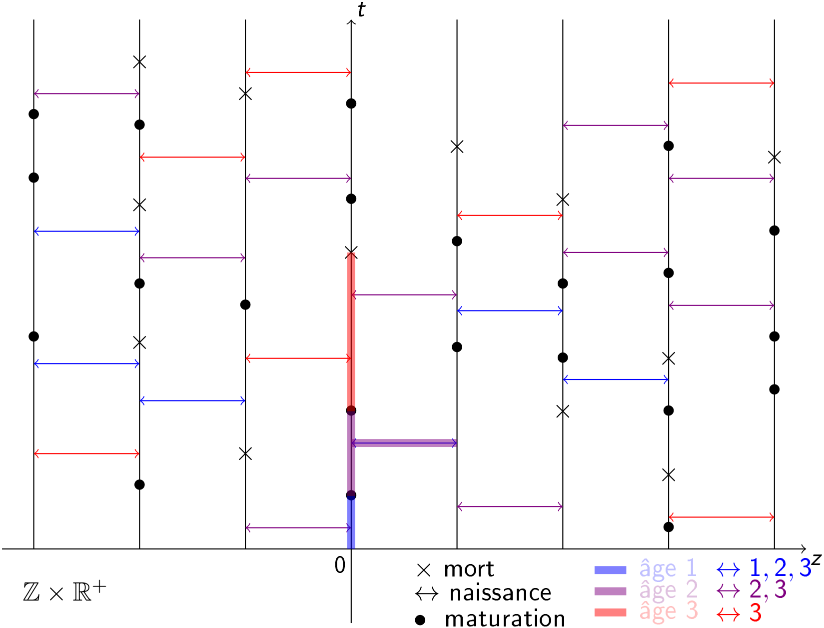


t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
● maturation
âge 1 ↔ 1, 2, 3
âge 2 ↔ 2, 3
âge 3 ↔ 3

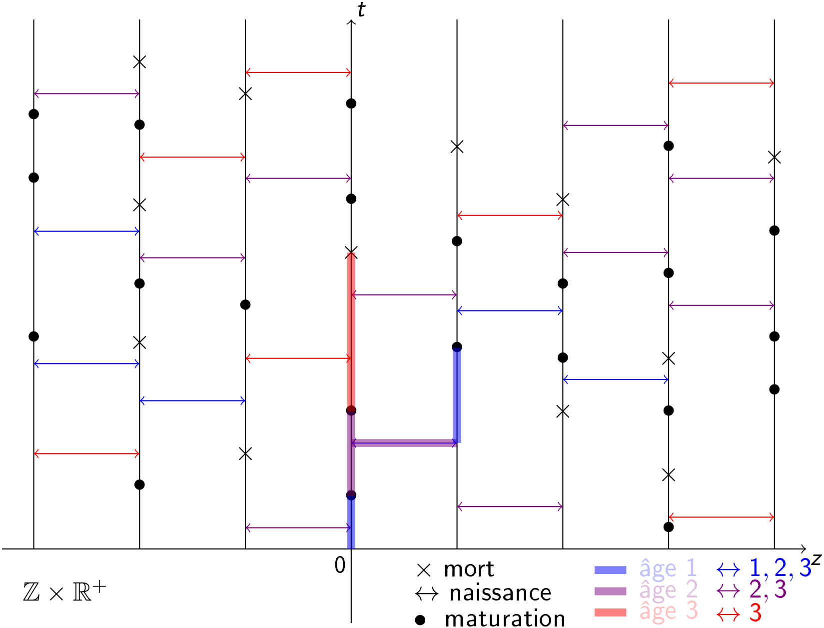


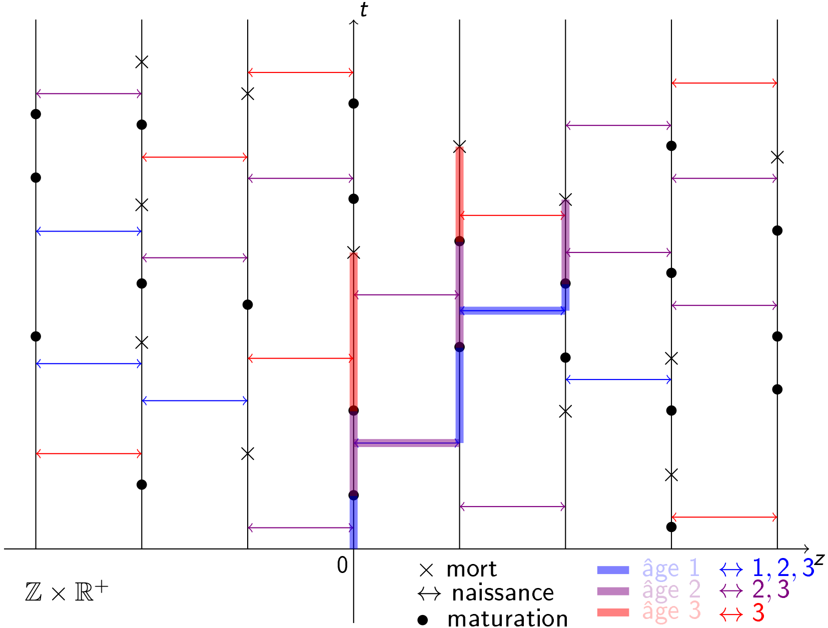
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3


t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3

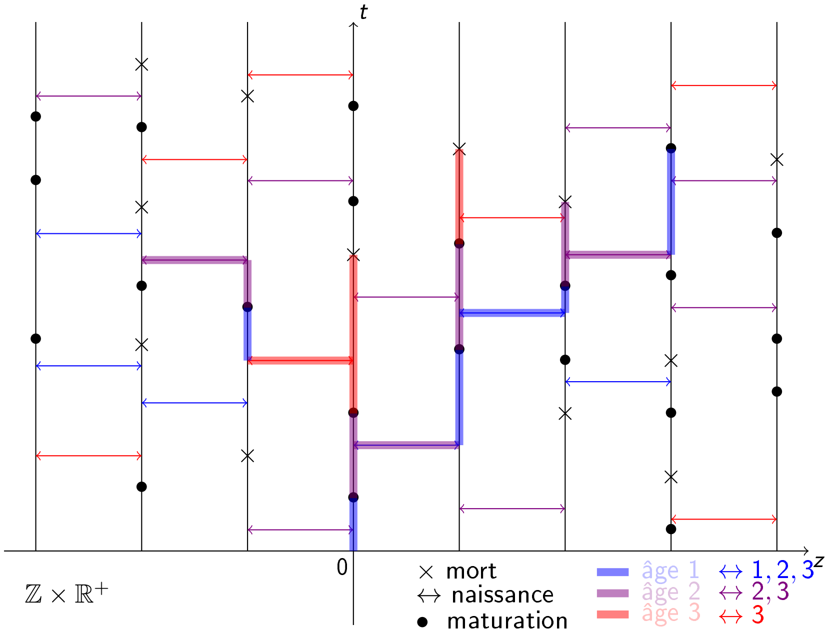


t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance
$\bullet$ maturation
âge 1 $\leftrightarrow$ 1, 2, 3
âge 2 $\leftrightarrow$ 2, 3
âge 3 $\leftrightarrow$ 3

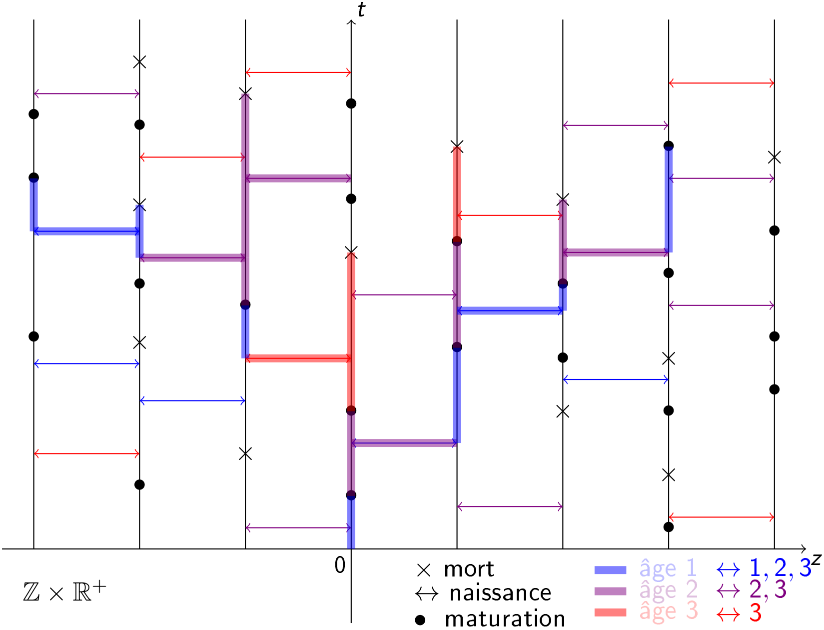

t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3



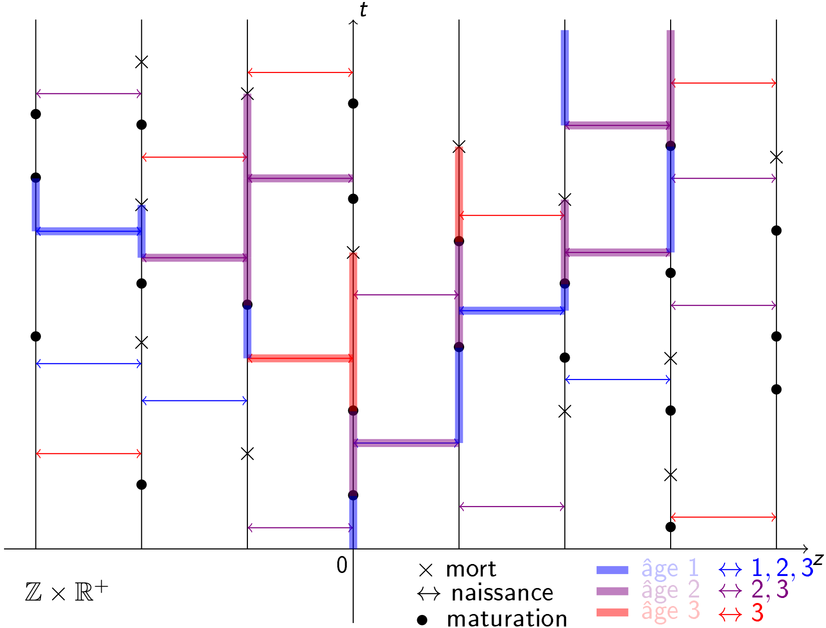
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1 ↔ 1, 2, 3
âge 2 ↔ 2, 3
âge 3 ↔ 3



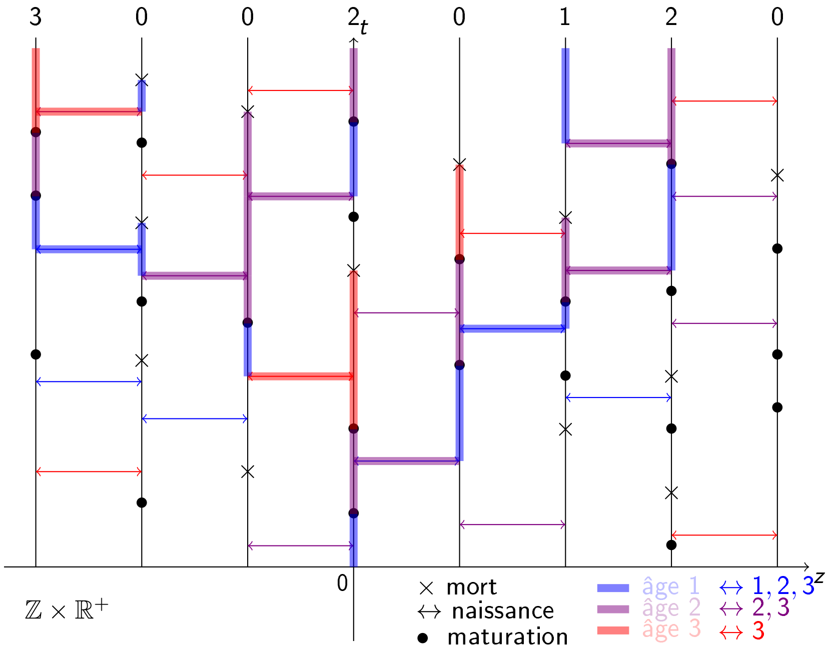
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance
$\bullet$ maturation
âge 1
âge 2
âge 3
$\leftrightarrow$ 1, 2, 3
$\leftrightarrow$ 2, 3
$\leftrightarrow$ 3

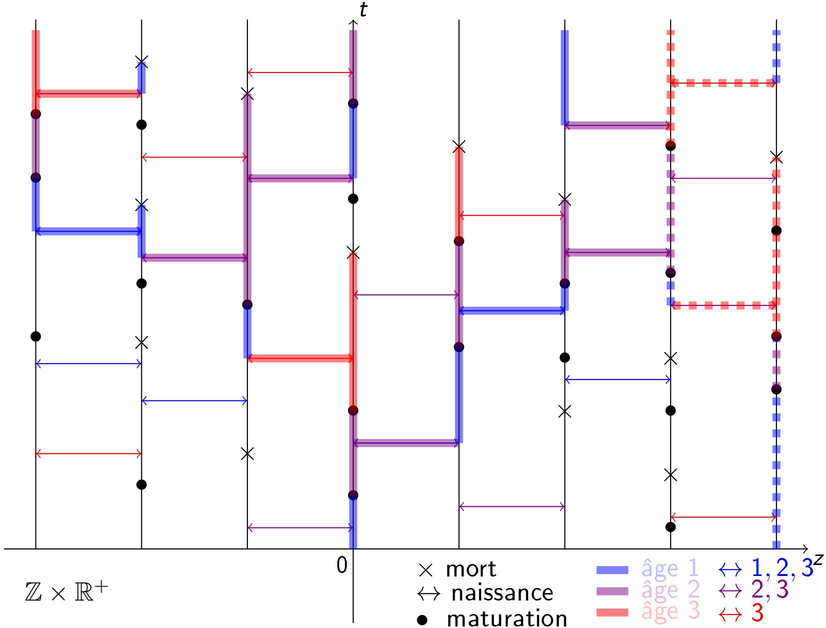


t
z
0
ℤ × ℝ⁺
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1 ↔ 1, 2, 3
âge 2 ↔ 2, 3
âge 3 ↔ 3

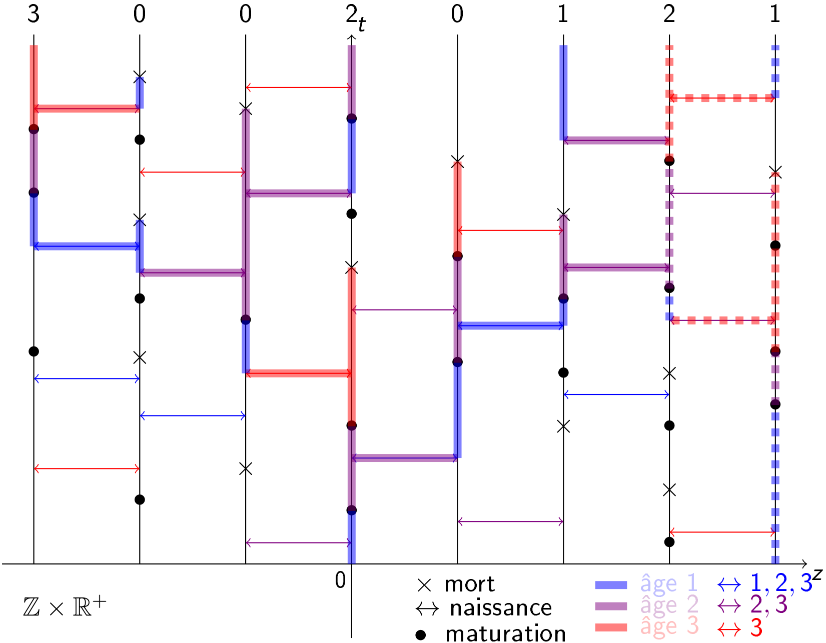


t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1 ↔ 1, 2, 3
âge 2 ↔ 2, 3
âge 3 ↔ 3


3
0
0
2
0
1
2
0
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3



t
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3


3
0
0
2
0
1
2
1
t
z
0
mort
naissance
maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des paramètres de naissance :

1. $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}^+$ et $\lambda_0 = 0$,
2. $(\lambda_i)_i$ est croissante,
3. $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = \lambda_\infty < \infty$.

Soit $\gamma > 0$ paramètre de maturation et $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ une fonction à support fini.

Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des paramètres de naissance :

1. $\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}^+$ et $\lambda_0 = 0$,
2. $(\lambda_i)_i$ est croissante,
3. $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda_\infty < \infty$.

Soit $\gamma > 0$ paramètre de maturation et $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ une fonction à support fini.

Définition

Un PCV $\{\xi_t^f, t \geq 0\}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$ avec $\xi_0 = f$.
Soit $z \in \mathbb{Z}^d$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

- z est mort (ou sain) si $\xi_t^f(z) = 0$,
- z est vivant (ou infecté) d'âge k si $\xi_t^f(z) = k$.

L'évolution du système est :

- un site vivant meurt avec un taux 1,
- un site naît avec un taux dépendant de son nombre de voisins vivants et de leurs âges : $\sum_{z',\|z'-z\|_1=1} \lambda_{\xi_t^f(z')}$,
- chaque nouveau né a l'âge 1,
- un site d'âge n passe à l'âge $n+1$ à taux γ.

Pour $t \geq 0$ on note :

$$A_t^f = \text{supp } \xi_t^f = \{x \in \mathbb{Z}^d ; \xi_t^f(x) \neq 0\},$$
$$= \text{l'ensemble des points vivants au temps } t.$$

Premières propriétés

Soient $f, g : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ et $t > 0$.

- Le PCV est **attractif** i.e $f \leq g \implies \xi_t^f \leq \xi_t^g$ et $A_t^f \leq A_t^g$;
- Le PCV est **additif** i.e $\xi_t^{f \vee g} = \xi_t^f \vee \xi_t^g$;
- Le PCV est **monotone** par rapport à ses paramètres :
  - croissant par rapport aux paramètres de naissance et maturation.

But : Montrer un **théorème de forme asymptotique** pour $\bigcup_{s \leq t} A_t$.

Survie du processus de contact

Définition

On dit qu'il y a **survie** si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) > 0.$
extinction si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) = 0.$

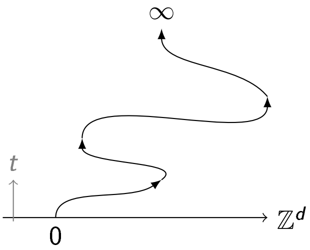
Valeur critique pour le PC : $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$

Survie du processus de contact

Définition

On dit qu'il y a **survie** si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) > 0$.
extinction si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) = 0$.

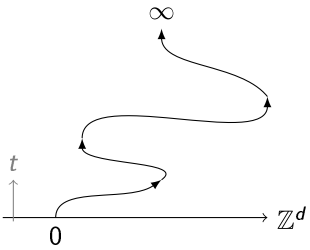
Valeur critique pour le PC : $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$



Survie du processus de contact

Définition

On dit qu'il y a **survie** si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) > 0$.
extinction si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) = 0$.



Valeur critique pour le PC : $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$

Transition de phase [Harris, 74]

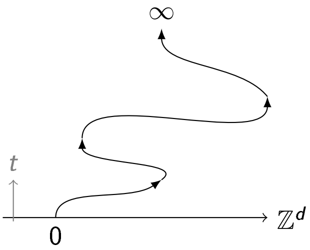
Il existe une valeur critique $\lambda_c \in \left]0, +\infty\right[$ tel que :

- si $\lambda < \lambda_c$, extinction,
- si $\lambda > \lambda_c$, survie.

Survie du processus de contact

Définition

On dit qu'il y a **survie** si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) > 0$.
extinction si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) = 0$.



Valeur critique pour le PC : $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$

Transition de phase [Harris, 74]

Il existe une valeur critique $\lambda_c \in \,]0, +\infty[$ tel que :

- si $\lambda < \lambda_c$, extinction,
- si $\lambda > \lambda_c$, survie.

Au point critique ? [Bezuidenhout et Grimmett, 91]

$$\lambda = \lambda_c, \text{ extinction.}$$

Krone définit une quantité similaire :

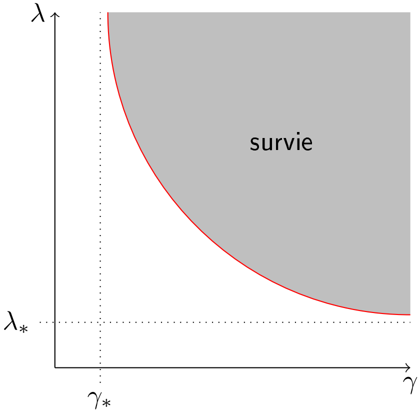
$$\lambda_c(\gamma) = \inf\left\{\lambda : \ \mathbb{P}_{\lambda,\gamma}\left(\forall t > 0, \ \xi_t^{\{0(2)\}} \neq \emptyset\right) > 0\right\}.$$

0(2) : le site 0 dans l'état adulte.

Krone définit une quantité similaire :

$$\lambda_c(\gamma) = \inf \left\{ \lambda : \ \mathbb{P}_{\lambda,\gamma} \left(\forall t > 0, \ \xi_t^{\{0(2)\}} \neq \emptyset \right) > 0 \right\}.$$

0(2) : le site 0 dans l'état adulte.



$\lambda_* = \lambda_c(PC)$. $\gamma_* > 0$ pour $d = 1$ par Krone (1999) et $d \geq 1$ par Foxall (2014).

Région de survie du PCV :

$$S_\gamma = \left\{\Lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{croissante } \ / \ \mathbb{P}_{\Lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t \not\equiv 0\right) > 0\right\}.$$

- Si $\Lambda \in S_\gamma$ on a survie.
- Si $\Lambda \notin S_\gamma$ on a extinction.
- Soient $\Lambda = (\lambda_i)_i$ et $\Lambda' = (\lambda'_i)_i$. Si $\Lambda \in S_\gamma$ et $\forall i, \lambda_i \leq \lambda'_i$ alors $\Lambda' \in S_\gamma$.

Région de survie du PCV :

$$S_\gamma = \left\{ \Lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{croissante}\ / \ \mathbb{P}_{\Lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t \not\equiv 0\right) > 0 \right\}.$$

- Si $\Lambda \in S_\gamma$ on a survie.
- Si $\Lambda \notin S_\gamma$ on a extinction.
- Soient $\Lambda = (\lambda_i)_i$ et $\Lambda' = (\lambda'_i)_i$. Si $\Lambda \in S_\gamma$ et $\forall i, \lambda_i \leq \lambda'_i$ alors $\Lambda' \in S_\gamma$.

Si $\forall i, \lambda_i > \lambda_c(PC)$, alors on a survie.

Région de survie du PCV :

$$S_\gamma = \left\{ \Lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{croissante}\ / \ \mathbb{P}_{\Lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t \neq 0\right) > 0 \right\}.$$

- Si $\Lambda \in S_\gamma$ on a survie.
- Si $\Lambda \notin S_\gamma$ on a extinction.
- Soient $\Lambda = (\lambda_i)_i$ et $\Lambda' = (\lambda'_i)_i$. Si $\Lambda \in S_\gamma$ et $\forall i, \lambda_i \leq \lambda'_i$ alors $\Lambda' \in S_\gamma$.

Si $\forall i, \lambda_i > \lambda_c(PC)$, alors on a survie.

Zone critique non triviale

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ fixés, il existe λ_{m+1} et γ tels que $\mathbb{P}_{\Lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t \neq 0\right) > 0$.

Pour montrer un Théorème de Forme Asymptotique...

Soient Λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\Lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right) > 0$.
On veut montrer un **théorème de forme asymptotique** pour le PCV :

Théorème

Il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, pour toute $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ à support fini, presque sûrement,

$$\forall t > 0,\ (1-\epsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t^f}{t} \subset (1+\epsilon)B_\mu,$$

avec $\tilde{H}_t^f = \cup_{s \le t} A_s^f + [0,1]^d$ et B_μ la boule unité de μ.

$\tilde{H}_t^f$ est (presque) l'ensemble des points nés avant t.

Pour montrer un Théorème de Forme Asymptotique...

Soient Λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\Lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right) > 0$.

On veut montrer un **théorème de forme asymptotique** pour le PCV :

Théorème

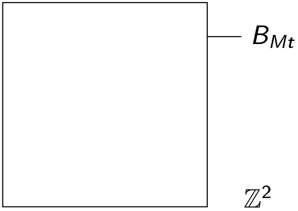
Il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, pour toute $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ à support fini, presque sûrement,

$$\forall t > 0,\ (1-\epsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t^f}{t} \subset (1+\epsilon)B_\mu,$$

avec $\tilde{H}_t^f = \cup_{s \leq t} A_s^f + [0,1]^d$ et B_μ la boule unité de μ.

$\tilde{H}_t^f$ est (presque) l'ensemble des points nés avant t.

1. Croissance au plus linéaire



Pour montrer un Théorème de Forme Asymptotique...

Soient Λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\Lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right) > 0$.

On veut montrer un **théorème de forme asymptotique** pour le PCV :

Théorème

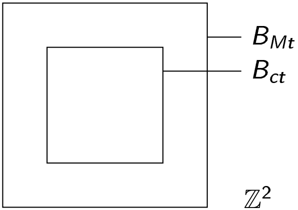
Il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, pour toute $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ à support fini, presque sûrement,

$$\forall t > 0,\ (1-\epsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t^f}{t} \subset (1+\epsilon)B_\mu,$$

avec $\tilde{H}_t^f = \cup_{s \le t} A_s^f + [0,1]^d$ et B_μ la boule unité de μ.

$\tilde{H}_t^f$ est (presque) l'ensemble des points nés avant t.

1. Croissance au plus linéaire
2. Croissance au moins linéaire



Pour montrer un Théorème de Forme Asymptotique...

Soient Λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\Lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right) > 0$.
On veut montrer un **théorème de forme asymptotique** pour le PCV :

Théorème

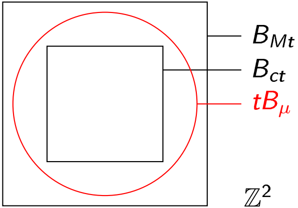
Il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, pour toute $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ à support fini, presque sûrement,

$$\forall t > 0,\ (1-\epsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t^f}{t} \subset (1+\epsilon)B_\mu,$$

avec $\tilde{H}_t^f = \cup_{s \leq t} A_s^f + [0,1]^d$ et B_μ la boule unité de μ.

$\tilde{H}_t^f$ est (presque) l'ensemble des points nés avant t.

1. Croissance au plus linéaire
2. Croissance au moins linéaire
3. Croissance exactement linéaire



Croissance au plus linéaire

Soient Λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\Lambda,\gamma}\left(\forall t > 0\ \xi_t^{\delta_0} \not\equiv 0\right) > 0$.

- $H_t^f = \cup_{s \leq t} A_s^f$ l'ensemble des points nés avant t
- Soit $(\eta_t)_t$ un processus de Richardson (processus de contact sans mort)
- $B_R = \{y \in \mathbb{Z}^d : \|y\|_\infty \leq R\}$

Il existe M, A, B tels que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(\eta_t \not\subseteq B_{Mt}) \leq A \exp(-Bt)$.

Croissance au plus linéaire

Soient Λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\Lambda,\gamma}\left(\forall t > 0\ \xi_t^{\delta_0} \not\equiv 0\right) > 0$.

- $H_t^f = \cup_{s \le t} A_s^f$ l'ensemble des points nés avant t
- Soit $(\eta_t)_t$ un processus de Richardson (processus de contact sans mort)
- $B_R = \{y \in \mathbb{Z}^d : \|y\|_\infty \le R\}$

Il existe M, A, B tels que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(\eta_t \not\subseteq B_{Mt}) \le A\exp(-Bt)$.

Lemme

Il existe A, B, M tels que pour toute $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ à support fini et tout $t > 0$

$$\mathbb{P}(H_t^f \not\subseteq B_{Mt}) \le \mathbb{P}(\eta_t \not\subseteq B_{Mt}) \le A\exp(-Bt).$$

Croissance au moins linéaire

1. Événement de bloc
2. Percolation background
3. Estimées souhaitées

Croissance au moins linéaire

1. Événement de bloc
2. Percolation background

Croissance exactement linéaire $\rightarrow$ TFA

$$t^f(x) = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^f(x) \neq 0\} \text{ temps d'atteinte de } x.$$
$$H_t^f = \{x \in \mathbb{Z}^d : t^f(x) \leq t\}.$$

- Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut montrer la convergence de $\frac{t(nx)}{n}$ quand $n \rightarrow \infty$.
- Théorème ergodique sous additif (ou presque) de Kingman :

$$t((n+p)x) \leq t(nx) + t(px) \circ \text{translation spatio-temporelle.}$$

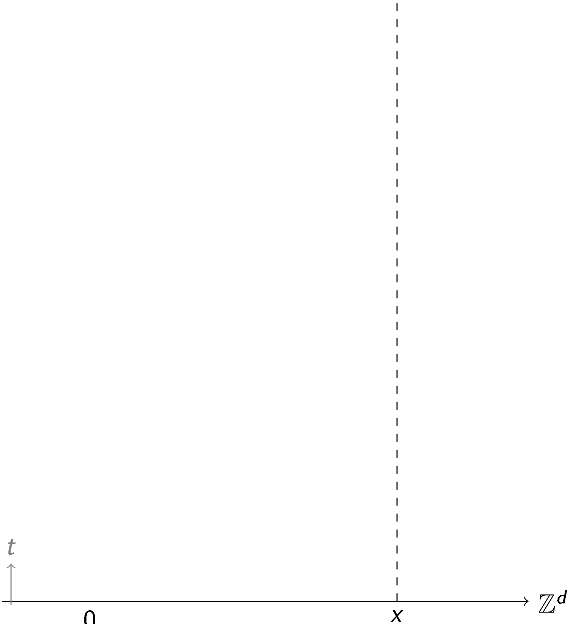
Croissance exactement linéaire → TFA

$$t^f(x) = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^f(x) \neq 0\} \text{ temps d'atteinte de } x.$$
$$H_t^f = \{x \in \mathbb{Z}^d : t^f(x) \leq t\}.$$

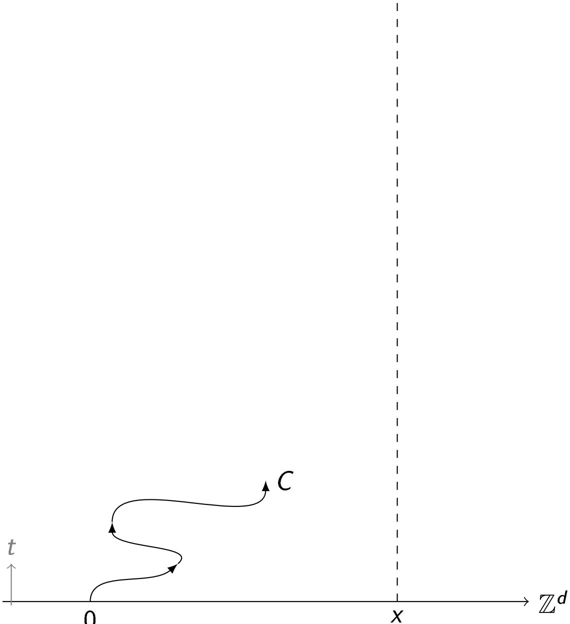
- Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut montrer la convergence de $\frac{t(nx)}{n}$ quand $n \to \infty$.
- Théorème ergodique sous additif (ou presque) de Kingman :

$$t((n+p)x) \leq t(nx) + t(px) \circ \text{translation spatio-temporelle.}$$

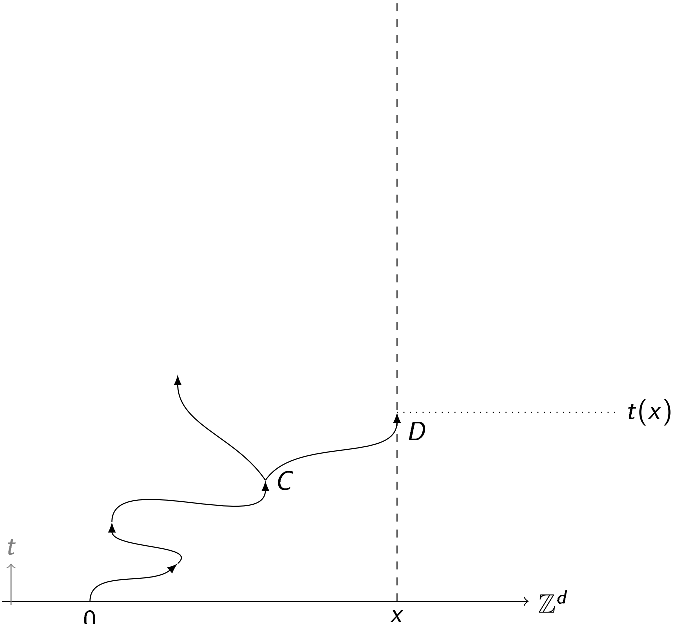
	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI
stationnarité	OUI	NON
(presque) sous additivité	OUI	NON



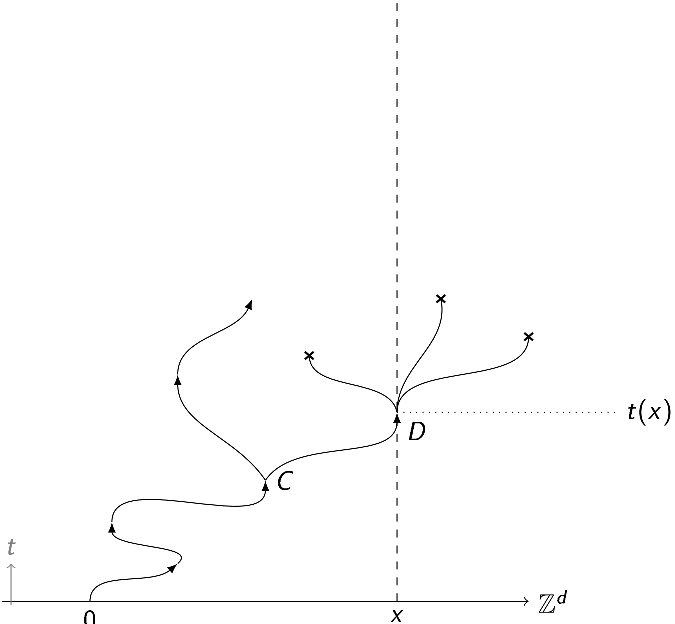
t
$\mathbb{Z}^d$
0
x



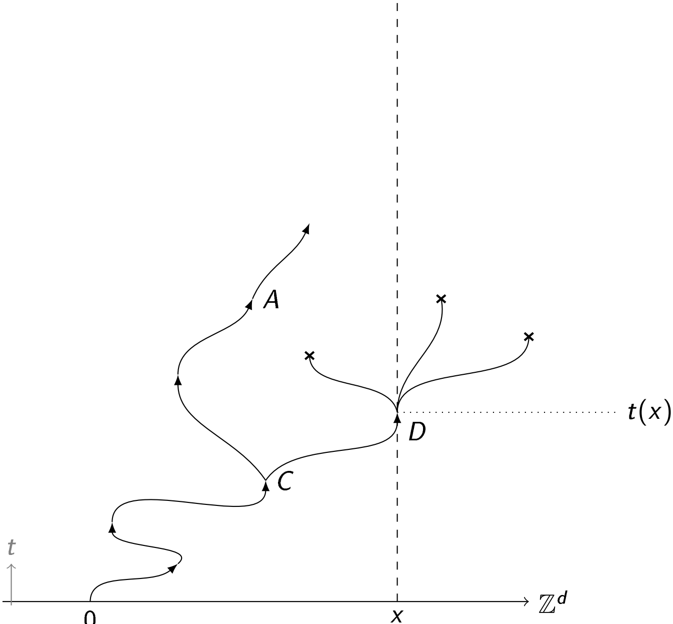
C
t
0
x
$\mathbb{Z}^d$



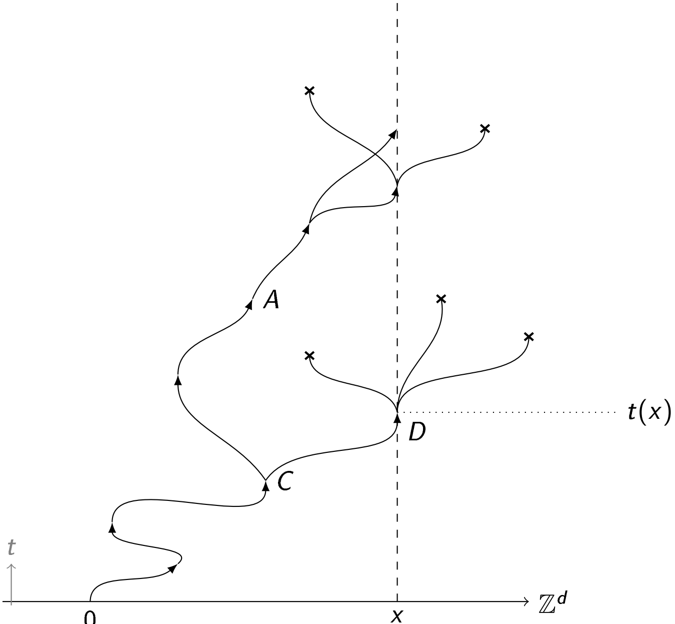
t(x)
D
C
t
0
x
$\mathbb{Z}^d$

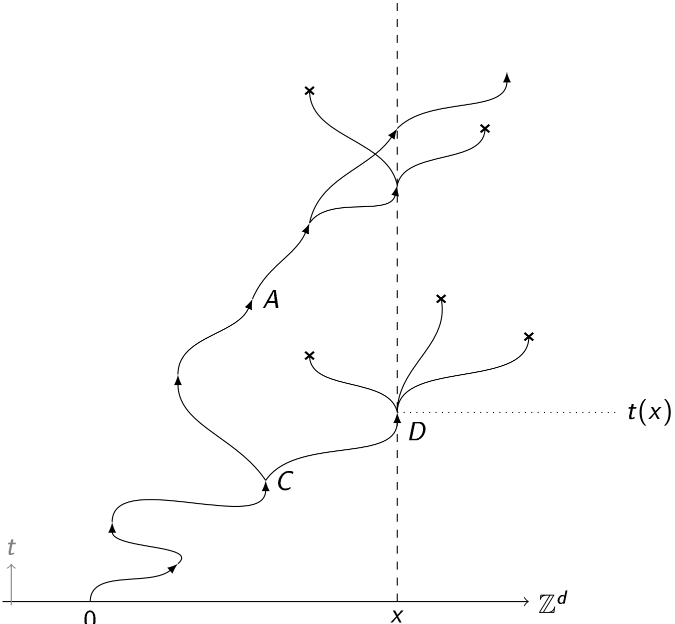


t
C
D
$t(x)$
0
x
$\mathbb{Z}^d$

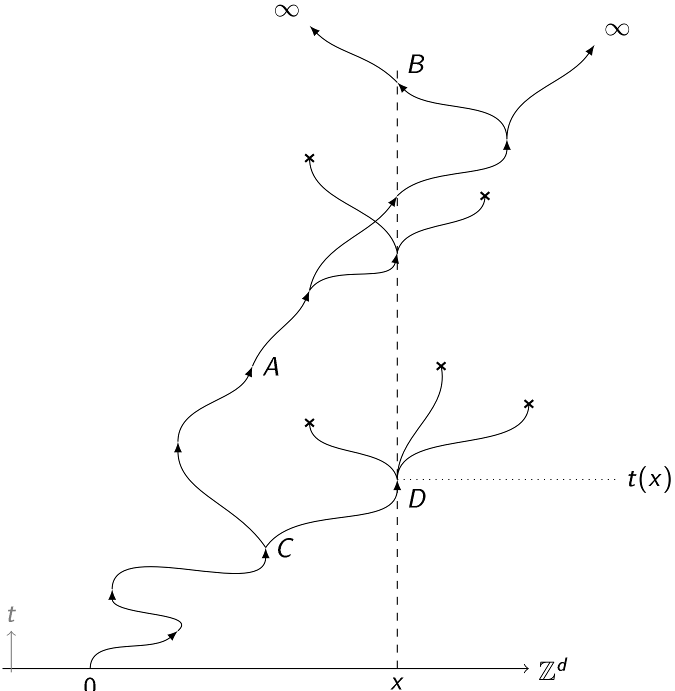


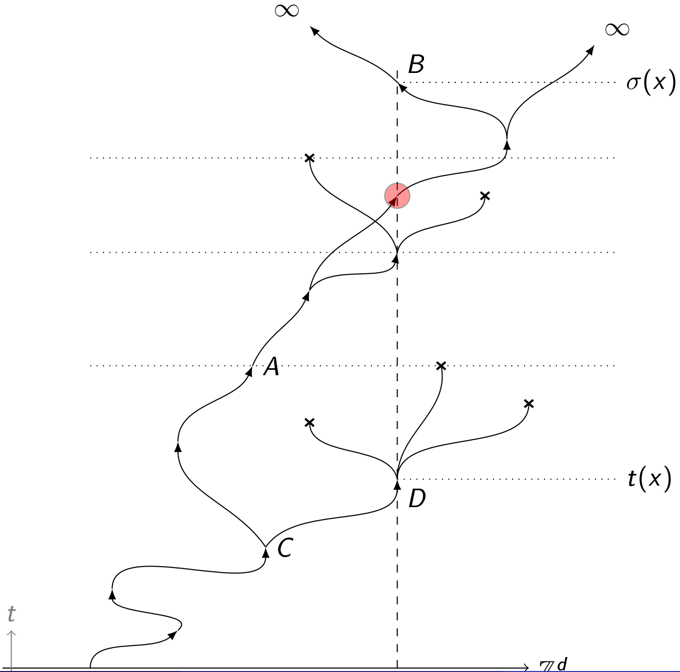
A
C
D
$t(x)$
t
0
x
$\mathbb{Z}^d$


A
C
D
t(x)
t
0
x
$\mathbb{Z}^d$



A
C
D
$t(x)$
t
0
x
$\mathbb{Z}^d$


∞
∞
B
A
t(x)
D
C
t
0
x
ℤ^d


∞
∞
B
$\sigma(x)$
A
$t(x)$
D
C
t
$\mathbb{Z}^d$

Croissance exactement linéaire $\to$ TFA

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$	σ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI	OUI
stationnarité	OUI	NON	OUI
presque sous additivité	OUI	NON	OUI

Croissance exactement linéaire $\rightarrow$ TFA

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$	σ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI	OUI
stationnarité	OUI	NON	OUI
presque sous additivité	OUI	NON	OUI

- σ vérifie les mêmes croissances d'ordre linéaire que t.

Croissance exactement linéaire → TFA

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$	σ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI	OUI
stationnarité	OUI	NON	OUI
presque sous additivité	OUI	NON	OUI

- σ vérifie les mêmes croissances d'ordre linéaire que t.
- TFA pour σ grâce au théorème presque sous additif de Kesten-Hammersley(74) :

$\sigma((n+p)x) \leq \sigma(nx) + \sigma(px) \circ$ translation spatio-temporelle $+$ quantité contrôlée.

Croissance exactement linéaire $\rightarrow$ TFA

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$	σ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI	OUI
stationnarité	OUI	NON	OUI
presque sous additivité	OUI	NON	OUI

- σ vérifie les mêmes croissances d'ordre linéaire que t.
- TFA pour σ grâce au théorème presque sous additif de Kesten-Hammersley(74) :

$$\sigma((n+p)x) \leq \sigma(nx) + \sigma(px) \circ \text{translation spatio-temporelle} + \text{quantité contrôlée.}$$

- « Uniforme Continuité » de σ.

Croissance exactement linéaire $\rightarrow$ TFA

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$	σ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI	OUI
stationnarité	OUI	NON	OUI
presque sous additivité	OUI	NON	OUI

- σ vérifie les mêmes croissances d'ordre linéaire que t.
- TFA pour σ grâce au théorème presque sous additif de Kesten-Hammersley(74) :

$$\sigma((n+p)x) \leq \sigma(nx) + \sigma(px) \circ \text{translation spatio-temporelle} + \text{quantité contrôlée.}$$

- « Uniforme Continuité »de σ.
- Contrôle de la différence entre t et σ $\rightarrow$ TFA pour t.

Merci pour votre attention

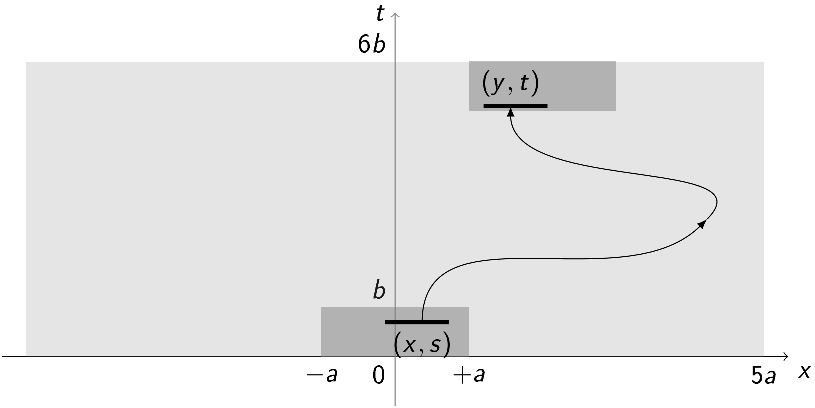
Croissance au moins linéaire

1. Événement de bloc
2. Percolation background
3. Estimées souhaitées

Croissance au moins linéaire

1. Événement de bloc

Si survie alors $\forall \epsilon > 0\ \exists n, a, b$, la probabilité de l'événement est supérieur à $1 - \epsilon$.



Croissance au moins linéaire

1. Événement de bloc
2. Percolation background
3. Éstimées souhaitées

2. Percolation background