Problèmes de diffusion pour des systèmes de particules en interaction

Marielle Simon,
École Normale Supérieure de Lyon

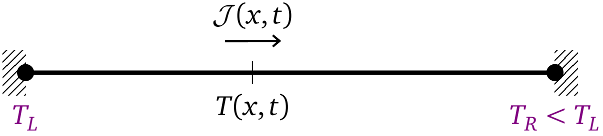
Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens
Forges-les-Eaux, 2014

Quelques minutes de physique

Question 1. **Qu'est-ce que l'équation de la chaleur ?**

Quelques minutes de physique

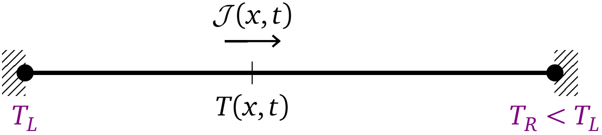
Question 1. **Qu'est-ce que l'équation de la chaleur ?**



$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}}$$

Quelques minutes de physique

Question 1. **Qu'est-ce que l'équation de la chaleur ?**



$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}}$$

Loi de Fourier (1822) : à l'état stationnaire,

$$\boxed{\mathcal{J}(x,t) = \mathbf{D}(T)\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)}$$

$\mathbf{D}$ = coefficient de diffusion.

Une loi seulement empirique

Question 2. **Où sont les difficultés ?**

Une loi seulement empirique

Question 2. Où sont les difficultés ?

1. Définir les fonctions $T(x,t)$ et $\mathcal{J}(x,t)$.

Une loi seulement empirique

Question 2. Où sont les difficultés ?

1. Définir les fonctions $T(x,t)$ et $\mathcal{J}(x,t)$.

   $\Rightarrow$ Propriété d'*équilibre local*.

Une loi seulement empirique

Question 2. **Où sont les difficultés ?**

1. Définir les fonctions $T(x,t)$ et $\mathcal{J}(x,t)$.

   $\Rightarrow$ Propriété d'*équilibre local*.

2. Trouver un bon modèle *microscopique* :

Une loi seulement empirique

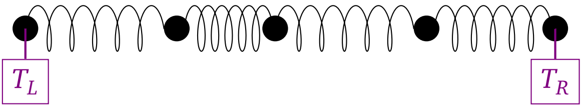
Question 2. Où sont les difficultés ?

1. Définir les fonctions $T(x,t)$ et $\mathcal{J}(x,t)$.

   $\Rightarrow$ Propriété d'*équilibre local*.

2. Trouver un bon modèle *microscopique* :

   $\Rightarrow$ Chaîne de N particules, capables de transporter l'énergie.



Une loi seulement empirique

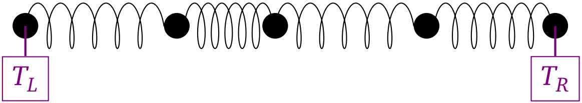
Question 2. Où sont les difficultés ?

1. Définir les fonctions $T(x,t)$ et $\mathcal{J}(x,t)$.

   $\Rightarrow$ Propriété d'*équilibre local*.

2. Trouver un bon modèle *microscopique* :

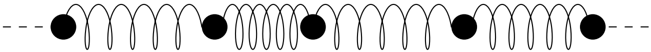
   $\Rightarrow$ Chaîne de N particules, capables de transporter l'énergie.



Quelle est la dynamique du système ?

Modèle microscopique

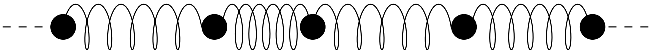
- Chaîne de N oscillateurs *harmoniques* couplés



$$\begin{array}{lcl} p_x & : & \text{moment de l'atome } x, \\ r_x & : & \text{distance entre les atomes } x \text{ et } x+1, \\ m_x & : & \text{masse de l'atome } x. \end{array}$$

Modèle microscopique

- Chaîne de N oscillateurs *harmoniques* couplés



$$
\begin{array}{lcl}
p_x & : & \text{moment de l'atome } x, \\
r_x & : & \text{distance entre les atomes } x \text{ et } x+1, \\
m_x & : & \text{masse de l'atome } x.
\end{array}
$$

- Énergie totale du système

$$\mathcal{H} := \sum_x \left\{ \frac{p_x^2}{2m_x} + V(r_x) \right\} = \sum_x e_x.$$

Dynamique Hamiltonienne

- Équations de Newton

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{p_{x+1}}{m_{x+1}} - \dfrac{p_x}{m_x} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = V'(r_x) - V'(r_{x-1}) \end{cases} \quad + \ \textit{conditions au bord.}$$

Dynamique Hamiltonienne

- Équations de Newton

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{p_{x+1}}{m_{x+1}} - \dfrac{p_x}{m_x} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = V'(r_x) - V'(r_{x-1}) \end{cases} \qquad + \ \textit{conditions au bord}.$$

- Courant microscopique $j_{x,x+1}$ donné par

$$\frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t} = j_{x-1,x} - j_{x,x+1}$$

Dynamique Hamiltonienne

- Équations de Newton

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{p_{x+1}}{m_{x+1}} - \dfrac{p_x}{m_x} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = V'(r_x) - V'(r_{x-1}) \end{cases} \qquad + \ \textit{conditions au bord.}$$

- Courant microscopique $j_{x,x+1}$ donné par

$$\frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t} = j_{x-1,x} - j_{x,x+1}$$

- Lois stationnaires (invariantes) sur les états $\omega := \{p_x, r_x\}$

Dynamique Hamiltonienne

- Équations de Newton

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{p_{x+1}}{m_{x+1}} - \dfrac{p_x}{m_x} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = V'(r_x) - V'(r_{x-1}) \end{cases} \qquad + \; \textit{conditions au bord.}$$

- Courant microscopique $j_{x,x+1}$ donné par

$$\frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t} = j_{x-1,x} - j_{x,x+1}$$

- Lois stationnaires (invariantes) sur les états $\omega := \{p_x, r_x\}$
  - ◇ Si $T_L - T_R \neq 0 \quad \to$ loi stationnaire μ_{ss}^N.

Dynamique Hamiltonienne

- Équations de Newton

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{p_{x+1}}{m_{x+1}} - \dfrac{p_x}{m_x} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = V'(r_x) - V'(r_{x-1}) \end{cases} \qquad + \ \textit{conditions au bord.}$$

- Courant microscopique $j_{x,x+1}$ donné par

$$\frac{\mathrm{d}e_x}{\mathrm{d}t} = j_{x-1,x} - j_{x,x+1}$$

- Lois stationnaires (invariantes) sur les états $\omega := \{p_x, r_x\}$
  - Si $T_L - T_R \neq 0$ $\rightarrow$ loi stationnaire μ_{ss}^N.
  - Si $T_L = T_R = T$ $\rightarrow$ loi d'équilibre μ_T^N.

Coefficient de diffusion

Question 3. Comment calculer $\mathrm{D}(T)$?

Coefficient de diffusion

Question 3. Comment calculer $\mathbf{D}(T)$?

- Conductivité pour le système fini

$$\boxed{\mathbf{D}_{N,\Delta T} := \frac{\int J_N \, \mathrm{d}\mu_{ss}^N}{\Delta T / N}} \qquad \begin{cases} J_N := \text{ courant } \textit{total} \\ \Delta T := T_L - T_R \end{cases}$$

Coefficient de diffusion

Question 3. **Comment calculer $\mathbf{D}(T)$?**

- Conductivité pour le système fini

$$\boxed{\mathbf{D}_{N,\Delta T} := \frac{\int J_N \, \mathrm{d}\mu_{ss}^N}{\Delta T / N}} \qquad \begin{cases} J_N := \text{ courant } \textit{total} \\ \Delta T := T_L - T_R \end{cases}$$

- Étude (existence ?) de

$$\boxed{\mathbf{D}(T) := \lim_{N \to \infty} \lim_{\Delta T \to 0} \mathbf{D}_{N,\Delta T}}$$

Coefficient de diffusion

Question 3. Comment calculer $\mathbf{D}(T)$?

- Conductivité pour le système fini

$$\boxed{\mathbf{D}_{N,\Delta T} := \frac{\int J_N \, \mathrm{d}\mu_{ss}^N}{\Delta T / N}} \qquad \begin{cases} J_N := \text{ courant } \textit{total} \\ \Delta T := T_L - T_R \end{cases}$$

- Étude (existence ?) de

$$\boxed{\mathbf{D}(T) := \lim_{N\to\infty} \lim_{\Delta T \to 0} \mathbf{D}_{N,\Delta T}}$$

- Formule de Green-Kubo (existence ?)

$$\boxed{\mathbf{D}^{GK}(T) := \frac{1}{T^2} \sum_{x\in\mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \Big\langle j_{x,x+1}(t)\, j_{0,1}(0) \Big\rangle_T \, \mathrm{d}t}.$$

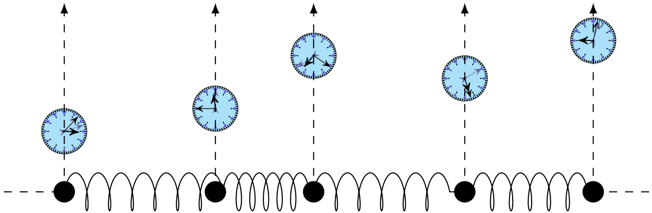
Un peu de bruit

Ajout d'une **perturbation stochastique** $\rightsquigarrow$ "ergodicité".

Un peu de bruit

Ajout d'une **perturbation stochastique** $\rightsquigarrow$ "ergodicité".

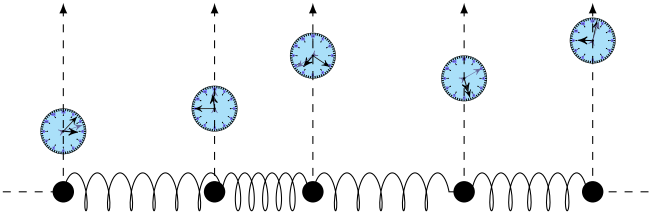
À chaque atome x est attaché un processus de Poisson.



Un peu de bruit

Ajout d'une **perturbation stochastique** $\rightsquigarrow$ "ergodicité".

À chaque atome x est attaché un processus de Poisson.

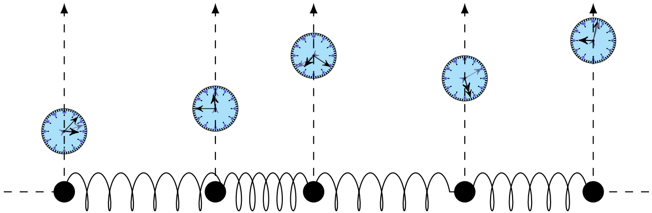


Quand l'horloge sonne...

Un peu de bruit

Ajout d'une **perturbation stochastique** $\rightsquigarrow$ "ergodicité".

À chaque atome x est attaché un processus de Poisson.



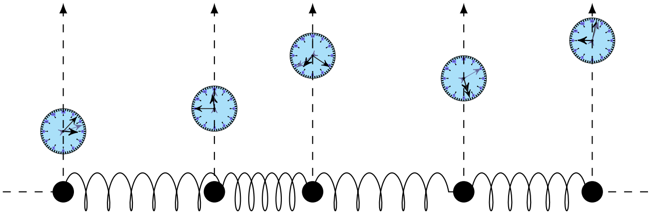
Quand l'horloge sonne...

a) Flip : le moment p_x devient $-p_x$

Un peu de bruit

Ajout d'une **perturbation stochastique** $\rightsquigarrow$ "ergodicité".

À chaque atome x est attaché un processus de Poisson.



Quand l'horloge sonne...

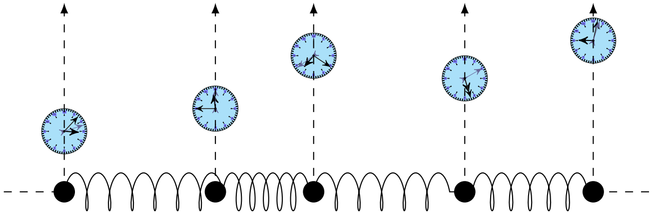
a) Flip : le moment p_x devient $-p_x$

b) Échange faible : on échange p_x et p_{x+1}

Un peu de bruit

Ajout d'une **perturbation stochastique** $\rightsquigarrow$ "ergodicité".

À chaque atome x est attaché un processus de Poisson.



Quand l'horloge sonne...

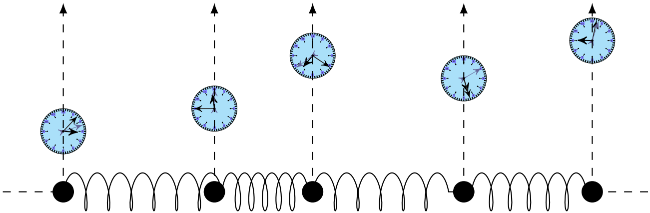
a) Flip : le moment p_x devient $-p_x$

b) Échange faible : on échange p_x et p_{x+1} $\rightarrow$ conserve $\sum p_x$!!

Un peu de bruit

Ajout d'une **perturbation stochastique** $\rightsquigarrow$ "ergodicité".

À chaque atome x est attaché un processus de Poisson.



Quand l'horloge sonne...

- **a) Flip :** le moment p_x devient $-p_x$
- **b) Échange faible :** on échange p_x et p_{x+1} $\rightarrow$ conserve $\sum p_x$!!
- **c) Échange fort :** on échange $p_x / \sqrt{m_x}$ et r_x

Question 4. Que sait-on sur $\mathrm{D}(T)$?

Question 4. Que sait-on sur $\mathrm{D}(T)$?

1. Masses constantes $m_x \equiv 1$

   a) **Cas harmonique** $V(r) = r^2$

Question 4. Que sait-on sur $\mathbf{D}(T)$?

❶ MASSES CONSTANTES $m_x \equiv 1$

a) Cas harmonique $V(r) = r^2$

sans bruit $\mathbf{D}_N \sim N$ [Lebowitz L. R. 1967]

Question 4. Que sait-on sur $\mathbf{D}(T)$?

1. Masses constantes $m_x \equiv 1$

   a) **Cas harmonique** $V(r) = r^2$

sans bruit	$\mathbf{D}_N \sim N$	[Lebowitz L. R. 1967]
+ échange faible	$\mathbf{D}_N^{GK} \sim \sqrt{N}$	[Basile B. O. 2009]

Question 4. Que sait-on sur $\mathbf{D}(T)$?

1. Masses constantes $m_x \equiv 1$

   a) **Cas harmonique** $V(r) = r^2$

sans bruit	$\mathbf{D}_N \sim N$	[Lebowitz L. R. 1967]
+ échange faible	$\mathbf{D}_N^{GK} \sim \sqrt{N}$	[Basile B. O. 2009]
+ échange fort ou flip	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	[Bernardin O. 2005]

Question 4. Que sait-on sur $\mathbf{D}(T)$?

❶ MASSES CONSTANTES $m_x \equiv 1$

a) Cas harmonique $V(r) = r^2$

sans bruit	$\mathbf{D}_N \sim N$	[Lebowitz L. R. 1967]
+ échange faible	$\mathbf{D}_N^{GK} \sim \sqrt{N}$	[Basile B. O. 2009]
+ échange fort ou flip	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	[Bernardin O. 2005]

b) Cas général $V(r)$

Question 4. Que sait-on sur $\mathbf{D}(T)$?

1. MASSES CONSTANTES $m_x \equiv 1$

a) Cas harmonique $V(r) = r^2$

sans bruit	$\mathbf{D}_N \sim N$	[Lebowitz L. R. 1967]
+ échange faible	$\mathbf{D}_N^{GK} \sim \sqrt{N}$	[Basile B. O. 2009]
+ échange fort ou flip	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	[Bernardin O. 2005]

b) Cas général $V(r)$

pur, non intégrable	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	??

Question 4. Que sait-on sur $\mathbf{D}(T)$?

1. Masses constantes $m_x \equiv 1$

a) Cas harmonique $V(r) = r^2$

sans bruit	$\mathbf{D}_N \sim N$	[Lebowitz L. R. 1967]
+ échange faible	$\mathbf{D}_N^{GK} \sim \sqrt{N}$	[Basile B. O. 2009]
+ échange fort ou flip	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	[Bernardin O. 2005]

b) Cas général $V(r)$

pur, non intégrable	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	??
+ échange faible	Bornes sur $\mathbf{D}_N^{GK}$	[Basile B. O. 2009]

Question 4. Que sait-on sur $\mathbf{D}(T)$?

1. MASSES CONSTANTES $m_x \equiv 1$

   a) **Cas harmonique** $V(r) = r^2$

sans bruit	$\mathbf{D}_N \sim N$	[Lebowitz L. R. 1967]
+ échange faible	$\mathbf{D}_N^{GK} \sim \sqrt{N}$	[Basile B. O. 2009]
+ échange fort ou flip	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	[Bernardin O. 2005]

   b) **Cas général** $V(r)$

pur, non intégrable	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	??
+ échange faible	Bornes sur $\mathbf{D}_N^{GK}$	[Basile B. O. 2009]

2. MASSES I.I.D BORNÉES

   a) **Cas harmonique** $V(r) = r^2$

Question 4. Que sait-on sur $\mathbf{D}(T)$?

1. MASSES CONSTANTES $m_x \equiv 1$

   a) **Cas harmonique** $V(r) = r^2$

sans bruit	$\mathbf{D}_N \sim N$	[Lebowitz L. R. 1967]
+ échange faible	$\mathbf{D}_N^{GK} \sim \sqrt{N}$	[Basile B. O. 2009]
+ échange fort ou flip	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	[Bernardin O. 2005]

   b) **Cas général** $V(r)$

pur, non intégrable	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	??
+ échange faible	Bornes sur $\mathbf{D}_N^{GK}$	[Basile B. O. 2009]

2. MASSES I.I.D BORNÉES

   a) **Cas harmonique** $V(r) = r^2$

sans bruit	$\mathbb{E}[\mathbf{D}_N] \sim N^{1/2}$	[Ajanki H. 2011]

Question 4. Que sait-on sur $\mathbf{D}(T)$?

1. Masses constantes $m_x \equiv 1$

a) Cas harmonique $V(r) = r^2$

sans bruit	$\mathbf{D}_N \sim N$	[Lebowitz L. R. 1967]
+ échange faible	$\mathbf{D}_N^{GK} \sim \sqrt{N}$	[Basile B. O. 2009]
+ échange fort ou flip	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	[Bernardin O. 2005]

b) Cas général $V(r)$

pur, non intégrable	$\mathbf{D}_N \to \mathbf{D}$	??
+ échange faible	Bornes sur $\mathbf{D}_N^{GK}$	[Basile B. O. 2009]

2. Masses i.i.d bornées

a) Cas harmonique $V(r) = r^2$

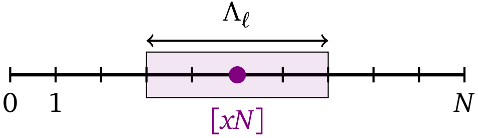
sans bruit	$\mathbb{E}\left[\mathbf{D}_N\right] \sim N^{1/2}$	[Ajanki H. 2011]
+ flip	$\mathbb{E}\left[\mathbf{D}_N^{GK}\right] \to \mathbf{D}$	[S. 2014]

Allons plus loin !

1. **Limites hydrodynamiques**

Allons plus loin !

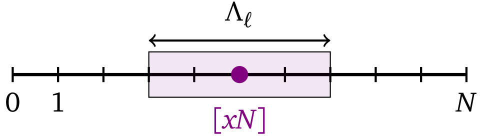
1. Limites hydrodynamiques



$$1 \ll \ell \ll N$$

Allons plus loin !

1. Limites hydrodynamiques



$1 \ll \ell \ll N$

Accélération du temps à l'échelle diffusive tN^2

$$\boxed{\frac{1}{\ell}\sum_{y\in\Lambda_\ell} e_y(tN^2) \simeq e(x,t)}$$

où $e(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathbf{D}(e)\frac{\partial e}{\partial x}\right]$$

[S. 2013 : Harmonique + Flip]

2. Fluctuations de l’énergie à l’équilibre

2. Fluctuations de l'énergie à l'équilibre

- Mesures d'équilibre μ_T^N = mesures de Gibbs

$$\mathrm{d}\mu_T(\omega) := \frac{1}{Z(T)} \prod_{x=1}^{N} \exp\left(-\frac{e_x}{T}\right) \mathrm{d}r_x \mathrm{d}p_x$$

2. Fluctuations de l'énergie à l'équilibre

- Mesures d'équilibre μ_T^N = mesures de Gibbs

$$d\mu_T(\omega) := \frac{1}{Z(T)} \prod_{x=1}^{N} \exp\left(-\frac{e_x}{T}\right) dr_x dp_x$$

- Initialement : $\{r_x, p_x\}$ distribués selon μ_T et $\langle e_x \rangle_T = T$.

2. Fluctuations de l'énergie à l'équilibre

- Mesures d'équilibre μ_T^N = mesures de Gibbs

$$\mathrm{d}\mu_T(\omega) := \frac{1}{Z(T)} \prod_{x=1}^{N} \exp\left(-\frac{e_x}{T}\right) \mathrm{d}r_x \mathrm{d}p_x$$

- Initialement : $\{r_x, p_x\}$ distribués selon μ_T et $\langle e_x \rangle_T = T$.

Conséquence du TCL

$$\mathcal{Y}^N(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^{N} \delta_{x/N}(\cdot) \left\{e_x - T\right\}$$

converge en distribution vers un champ Gaussien.

2. Fluctuations de l'énergie à l'équilibre

- Mesures d'équilibre μ_T^N = mesures de Gibbs

$$\mathrm{d}\mu_T(\omega) := \frac{1}{Z(T)} \prod_{x=1}^{N} \exp\left(-\frac{e_x}{T}\right) \mathrm{d}r_x \mathrm{d}p_x$$

- Initialement : $\{r_x, p_x\}$ distribués selon μ_T et $\langle e_x \rangle_T = T$.

Conséquence du TCL

$$\mathcal{Y}^N(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^{N} \delta_{x/N}(\cdot) \left\{ e_x - T \right\}$$

converge en distribution vers un champ Gaussien.

Autrement dit : Pour F, G fonctions lisses,

$$\left\langle \mathcal{Y}^N(F)\, \mathcal{Y}^N(G) \right\rangle_T \xrightarrow[N\to\infty]{} 2T^2 \iint F(u)G(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Question 5. Et quand le temps évolue ?

Question 5. Et quand le temps évolue ?

Champ de fluctuations de l'énergie

$$\mathcal{Y}_t^N(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^{N} \delta_{x/N}(\cdot) \left\{ e_x\left(tN^{\mathbf{a}}\right) - T \right\}$$

Question 5. Et quand le temps évolue ?

Champ de fluctuations de l'énergie

$$\mathcal{Y}_t^N(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^{N} \delta_{x/N}(\cdot) \left\{ e_x\left(tN^{\mathbf{a}}\right) - T \right\}$$

Diffusion ?

Question 5. Et quand le temps évolue ?

Champ de fluctuations de l'énergie

$$\mathcal{Y}_t^N(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^{N} \delta_{x/N}(\cdot) \left\{ e_x\left(tN^{\mathbf{a}}\right) - T \right\}$$

Diffusion ? $\mathcal{Y}_t^N$ converge en distribution vers un processus de Ornstein-Uhlenbeck généralisé $\mathcal{Y}_t$ solution de l'EPDS linéaire

$$\boxed{\partial_t \mathcal{Y} = \mathbf{D} \partial_x^2 \mathcal{Y} \, \mathrm{d}t + \sqrt{4\mathbf{D}T^2} \, \partial_x \mathcal{B}(x,t)}$$

où $\mathcal{B}$ est un bruit blanc standard en espace et en temps.

Question 5. Et quand le temps évolue ?

Champ de fluctuations de l'énergie

$$\mathcal{Y}_t^N(\cdot) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=1}^{N} \delta_{x/N}(\cdot) \left\{ e_x\left(tN^{\mathbf{a}}\right) - T \right\}$$

Diffusion ? $\mathcal{Y}_t^N$ converge en distribution vers un processus de Ornstein-Uhlenbeck généralisé $\mathcal{Y}_t$ solution de l'EPDS linéaire

$$\boxed{\partial_t \mathcal{Y} = \mathbf{D} \partial_x^2 \mathcal{Y} \, \mathrm{d}t + \sqrt{4\mathbf{D}T^2} \, \partial_x \mathcal{B}(x,t)}$$

où $\mathcal{B}$ est un bruit blanc standard en espace et en temps.

Échelle diffusive : $a = 2$.

Résultats : cas harmonique

Soient F et G deux fonctions lisses,

$$\left\langle \mathcal{Y}_t^N(F)\, \mathcal{Y}_t^N(G) \right\rangle_T \xrightarrow[N\to\infty]{} 2T^2 \iint_{\mathbb{R}^2} F(u)G(v)\mathbf{P}_t(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

où $\mathbf{P}_t$ est le semi-groupe associé aux générateurs suivants :

Résultats : cas harmonique

Soient F et G deux fonctions lisses,

$$\left\langle \mathcal{Y}_t^N(F)\, \mathcal{Y}_t^N(G) \right\rangle_T \xrightarrow[N\to\infty]{} 2T^2 \iint_{\mathbb{R}^2} F(u)G(v)\mathbf{P}_t(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

où $\mathbf{P}_t$ est le semi-groupe associé aux générateurs suivants :

(i) **Harmonique + flip et** $a=2$ **[S. 2013]**

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathbf{D}\cdot\Delta}$$

Résultats : cas harmonique

Soient F et G deux fonctions lisses,

$$\left\langle \mathcal{Y}_t^N(F)\ \mathcal{Y}_t^N(G) \right\rangle_T \xrightarrow[N\to\infty]{} 2T^2 \iint_{\mathbb{R}^2} F(u)G(v)\mathbf{P}_t(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

où $\mathbf{P}_t$ est le semi-groupe associé aux générateurs suivants :

(i) **Harmonique + flip et $a = 2$** **[S. 2013]**

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathbf{D} \cdot \Delta}$$

(ii) **Harmonique + échange faible et $a = 3/2$** **[Bernardin G. J. 2014]**

$$\boxed{\mathcal{L} = -(-\Delta)^{3/4} - \nabla(-\Delta)^{1/4}}$$

Vers un “crossover” ?

Nouveau système !

Vers un “crossover” ?

Nouveau système !

Harmonique

Vers un “crossover” ?

Nouveau système !

Harmonique + Échange faible

Vers un "crossover" ?

Nouveau système !

Harmonique + Échange faible + **Flip avec intensité** N^{-b}

Vers un “crossover” ?

Nouveau système !

Harmonique + Échange faible + **Flip avec intensité** N^{-b}

Résultats

$b < 2/3$ Laplacien standard (échelle $a = 2 - b/2$)

Vers un “crossover” ?

Nouveau système !

$$\text{Harmonique} + \text{Échange faible} + \textbf{Flip avec intensité } N^{-b}$$

Résultats

$b < 2/3$	Laplacien standard	(échelle $a = 2 - b/2$)
$b > 1$	Laplacien fractionnaire	(échelle $a = 3/2$)

Vers un “crossover” ?

Nouveau système !

$$\text{Harmonique} + \text{Échange faible} + \textbf{Flip avec intensité } N^{-b}$$

Résultats

$b < 2/3$	Laplacien standard	(échelle $a = 2 - b/2$)
$b > 1$	Laplacien fractionnaire	(échelle $a = 3/2$)

[Bernardin Gonçalves Jara Sasada S. 2014]

Merci !