Temps d'atteinte d'un compact pour des modèles stochastiques de croissance

Etienne Adam

CMAP, Ecole Polytechnique.

21 avril 2015

Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens

Modèle stochastique de croissance

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n$$

où $g(x) = o(x)$, $\mathbb{E}(\xi_n \big| \mathcal{F}_n) = 0$, et $\mathbb{E}(\xi_n^2 \big| \mathcal{F}_n) = \sigma^2(X_n)$.

Modèle stochastique de croissance

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n$$

où $g(x) = o(x)$, $\mathbb{E}(\xi_n \big| \mathcal{F}_n) = 0$, et $\mathbb{E}(\xi_n^2 \big| \mathcal{F}_n) = \sigma^2(X_n)$.

Critère de récurrence/transience. Kersting (86)

Si

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)} < 1,$$

alors $\mathbb{P}(X_n \to \infty) = 0$.

Si

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)} > 1,$$

alors $\mathbb{P}(X_n \to \infty) > 0$.

Processus de Galton-Watson critique avec immigration

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \zeta_k + I_n,$$

Processus de Galton-Watson critique avec immigration

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \zeta_k + I_n,$$

$$X_{n+1} = X_n + \mathbb{E}(I_1) + \sum_{k=1}^{X_n} (\zeta_k - 1) + (I_n - \mathbb{E}(I_1)),$$

donc $g(x) = \mathbb{E}(I_1)$ et $\sigma^2(x) = x\mathrm{Var}(\zeta_1) + \mathrm{Var}(I_1)$.

Processus de Galton-Watson critique avec immigration

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \zeta_k + I_n,$$

$$X_{n+1} = X_n + \mathbb{E}(I_1) + \sum_{k=1}^{X_n} (\zeta_k - 1) + (I_n - \mathbb{E}(I_1)),$$

donc $g(x) = \mathbb{E}(I_1)$ et $\sigma^2(x) = x\mathrm{Var}(\zeta_1) + \mathrm{Var}(I_1)$.

Critère de récurrence/transience et temps de retour en 0, Zubkov (72)

On pose $\theta = \frac{2\mathbb{E}(I_1)}{\mathrm{Var}(\zeta_1)}$.
Si $\theta > 1$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est transiente.
Si $\theta < 1$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente et

$$\mathbb{P}_0(\tau_0 > n) \sim L(n) n^{\theta-1}.$$

On introduit deux transformations. On pose

$$G(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}y}{g(y)},$$

et pour $\alpha > 0$, on pose

$$\ell_\alpha = \left(G^{-1}(x)\right)^\alpha.$$

On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ et $\theta \in (0,1)$ tels que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)\,x}{g(x)} = 1 - \lambda$$

et

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2xg(x)}{\sigma^2(x)} = \theta.$$

Théorème

Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x_0 > A$, pour tout α et β tels que $0 < \alpha < 1 - \theta < \beta$, il existe deux constantes C_α et C_β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{C_\beta}{\ell_\beta(n)} \leq \mathbb{P}_{x_0}(\tau_A > n) \leq \frac{C_\alpha}{\ell_\alpha(n)},$$

où $\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \leq A\}$.

Un exemple

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n.$$

Si on prend $g(x) = cx^{\gamma}$ et $\sigma^2(x) = dx^{1+\gamma}$. Alors :

- $\theta = \frac{2c}{d}$
- $G(x) \propto x^{1-\gamma}$
- $\ell_\alpha(x) \propto x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple

Pour tout $0 < \alpha < 1 - \theta < \beta$,

$$\frac{C_\beta}{n^{\frac{\beta}{1-\gamma}}} \leq \mathbb{P}_{x_0}\left(\tau_A > n\right) \leq \frac{C_\alpha}{n^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}}.$$

Éléments de preuve

Outil : construction de fonctions de Lyapounov.

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n.$$

Idée

Trouver $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathbb{E}(L(X_{n+1}) - L(X_n) \big| \mathcal{F}_n) \leq 0.$$

Par exemple le logarithme :
comme

$$\log(x+h) \leq \log(x) + \frac{h}{x} - \frac{h^2 \mathbb{1}_{h<\varepsilon x}}{2(1-\varepsilon)x^2}$$

on en déduit que

$$\log(X_{n+1} \big| \mathcal{F}_n) \leq \log(X_n), \text{ si } \theta < 1.$$

Éléments de preuve

Outil : construction de fonctions de Lyapounov.

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n.$$

Idée

Trouver $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathbb{E}(L(X_{n+1}) - L(X_n) \big| \mathcal{F}_n) \leq -\varepsilon L'(X_n).$$

Éléments de preuve

Outil : construction de fonctions de Lyapounov.

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n.$$

Idée

Trouver $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathbb{E}(L(f(X_{n+1})) - L(f(X_n)) \big| \mathcal{F}_n) \leq -\varepsilon L'(f(X_n)).$$

Éléments de preuve

Pour $\alpha < 1 - \theta$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^{\alpha} - X_n^{\alpha} \big| \mathcal{F}_n) \leq -Dg(X_n)X_n^{\alpha-1}.$$

En posant $Y_n = G(X_n)$, on a

$$\mathbb{E}(\ell_\alpha(Y_{n+1}) - \ell_\alpha(Y_n) \big| \mathcal{F}_n) \leq -D\ell'_\alpha(Y_n).$$

Cas d'une chaîne de Markov

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique à valeurs dans un ensemble dénombrable $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $A > 0$, $[0, A] \cap \mathcal{X}$ est fini.

Théorème

i) Si $\lambda > 1-\theta$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente nulle.
ii) Si $\lambda < 1-\theta$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente positive et si on note π sa mesure de probabilité invariante, alors pour tout $\alpha \in (\lambda, 1-\theta)$ et pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathcal{X}$ telle que

$$\mathbb{E}_\nu(\ell'_\alpha(\tau_A)) < \infty,$$

on a que

$$\lim_{n\to\infty} \ell'_\alpha(n) \left\|\nu P^n - \pi\right\|_{\mathrm{TV}} = 0.$$

Exemple

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_n.$$

Si on prend $g(x) = cx^\gamma$ et $\sigma^2(x) = dx^{1+\gamma}$. Alors :

- $\theta = \frac{2c}{d}$
- $\lambda = 1 - \gamma$
- $G(x) \propto x^{1-\gamma}$
- $\ell_\alpha(x) \propto x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Si $\gamma < \theta$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente nulle.
ii) Si $\gamma > \theta$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente positive et pour tout $\alpha \in (1-\gamma, 1-\theta)$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{\alpha-1+\gamma}{1-\gamma}} \left\|\nu P^n - \pi\right\|_{\mathrm{TV}} = 0.$$

Galton-Watson état-dépendant

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \zeta_k(X_n),$$

avec $\mathbb{E}(\zeta_1(x)) = 1 + c/x$ et $\mathrm{Var}(\zeta_1(x)) = d + o(1)$.

Critère d'extinction

Si

$$\frac{2c}{d} < 1,$$

alors (X_n) s'éteint presque-sûrement.

Galton-Watson état-dépendant

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \zeta_k(X_n),$$

avec $\mathbb{E}(\zeta_1(x)) = 1 + c/x$ et $\mathrm{Var}(\zeta_1(x)) = d + o(1)$.
On suppose que 0 est un état absorbant et que pour tout $A > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon > 0$ et $k_A \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\mathbb{P}(X_{n+k_A} = 0 \big| X_n \leq A) \geq \varepsilon.$$

Soit $\theta = \frac{2c}{d}$ et supposons que $\theta \in (0,1)$. Alors, pour tout $\alpha < 1 - \theta < \beta$, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, il existe deux constantes D_α et D_β telles que

$$\frac{D_\beta}{n^\beta} \leq \mathbb{P}_x\left(\tau_0 > n\right) \leq \frac{D_\alpha}{n^\alpha}.$$

Perspectives

Multitype!

$$X_{n+1} = X_n M + g(X_n) + \xi_n,$$

où M est irréductible à coefficients strictement positifs de rayon spectral 1.
Pour l'instant : le cas où $g(X_n) = c$, ça marche!