Comportement en temps long à l'aide de pseudo-trajectoires asymptotiques

Florian Bouguet

Université de Rennes 1

18 avril 2016

Travail en collaboration avec

Michel Benaïm Bertrand Cloez

Thèse encadrée par

Jean-Christophe Breton Florent Malrieu

- On se donne $(x_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. telle que

$$\mathbb{E}[x_1] = 0, \mathrm{Var}(x_1) = \sigma^2.$$

- On se donne $(x_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. telle que

$$\mathbb{E}[x_1] = 0, \mathrm{Var}(x_1) = \sigma^2.$$

- On pose

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

- On se donne $(x_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. telle que

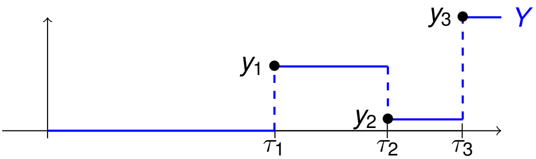
$$\mathbb{E}[x_1] = 0, \mathrm{Var}(x_1) = \sigma^2.$$

- On pose

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

- On pose, pour $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$, $Y_t = y_n$, où

$$\gamma_n = \frac{1}{n}, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k.$$



Etudions $(Y_t)_{t\geq 0}$.

- Notons
$$\mathcal{L}_n f(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \mathbb{E}[f(y_{n+1}) - f(y_n) | y_n = y].$$

Etudions $(Y_t)_{t\geq 0}$.

- Notons
$$\mathcal{L}_n f(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \mathbb{E}[f(y_{n+1}) - f(y_n) | y_n = y].$$
- Après calcul :
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \sqrt{\gamma_{n+1}} x_{n+1} + \left(\sqrt{\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}} - 1 - \sqrt{\gamma_n \gamma_{n+1}} \right) y_n \\ &\simeq y_n + \sqrt{\gamma_{n+1}} x_{n+1} + \left(\frac{\gamma_n}{2} - \sqrt{\gamma_n \gamma_{n+1}} \right) y_n. \end{aligned}$$

Etudions $(Y_t)_{t\geq 0}$.

- Notons

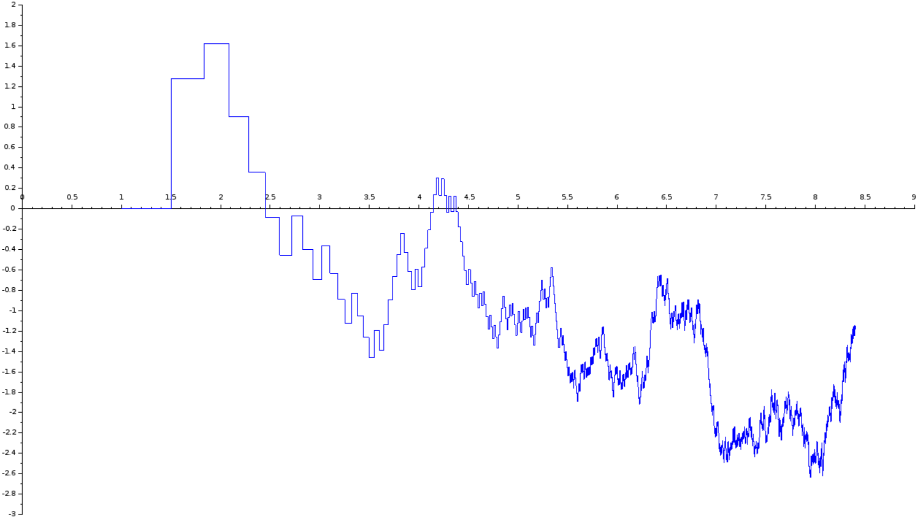
$$\mathcal{L}_n f(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \mathbb{E}[f(y_{n+1}) - f(y_n) | y_n = y].$$

- Après calcul :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \sqrt{\gamma_{n+1}} x_{n+1} + \left(\sqrt{\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}} - 1 - \sqrt{\gamma_n \gamma_{n+1}} \right) y_n \\ &\simeq y_n + \sqrt{\gamma_{n+1}} x_{n+1} + \left(\frac{\gamma_n}{2} - \sqrt{\gamma_n \gamma_{n+1}} \right) y_n. \end{aligned}$$

- On injecte dans $\mathcal{L}_n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n f(y) &\simeq \frac{1}{\gamma_{n+1}} \mathbb{E}\left[f'(y) \left(\frac{\gamma_n}{2} - \sqrt{\gamma_n \gamma_{n+1}} \right) y + \frac{f''(y)}{2} \gamma_{n+1} x_{n+1}^2 \right] \\ &\simeq -\frac{1}{2} y f'(y) + \frac{\sigma^2}{2} f''(y). \end{aligned}$$



Convergence de Y vers un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

$$\gamma_n = \frac{1}{n}, \qquad x_k = \pm 1, \qquad y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Soient $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique et $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller.

Pseudo-trajectoire asymptotique [1]

On dit que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une pseudo-trajectoire asymptotique de $(P_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $T > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{0\leq s\leq T} d_{\mathscr{F}}(\mathscr{L}(Y_{t+s}), \mathscr{L}(Y_t)P_s) = 0.$$

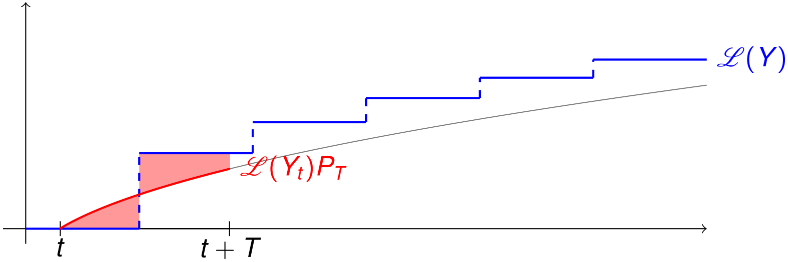
1. Benaïm (1999), Dynamics of stochastic approximation algorithms

Soient $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique et $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller.

Pseudo-trajectoire asymptotique [1]

On dit que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une pseudo-trajectoire asymptotique de $(P_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $T > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{0\leq s\leq T} d_{\mathscr{F}}(\mathscr{L}(Y_{t+s}), \mathscr{L}(Y_t)P_s) = 0.$$



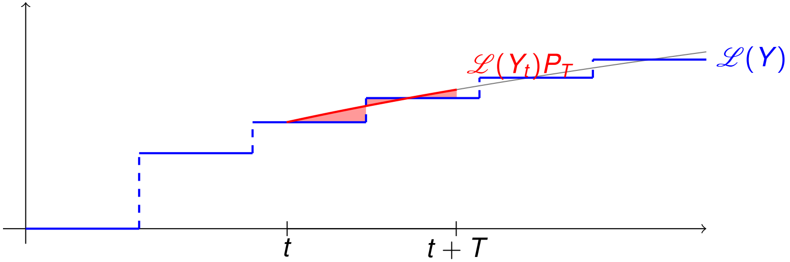
1. Benaïm (1999), Dynamics of stochastic approximation algorithms

Soient $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique et $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller.

Pseudo-trajectoire asymptotique [1]

On dit que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une pseudo-trajectoire asymptotique de $(P_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $T>0$,

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{0\leq s\leq T} d_{\mathscr{F}}(\mathscr{L}(Y_{t+s}),\mathscr{L}(Y_t)P_s)=0.$$



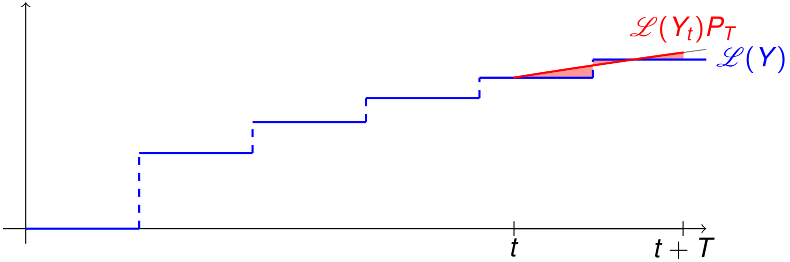
1. Benaïm (1999), Dynamics of stochastic approximation algorithms

Soient $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique et $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller.

Pseudo-trajectoire asymptotique [1]

On dit que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une pseudo-trajectoire asymptotique de $(P_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $T > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{0\leq s\leq T} d_{\mathscr{F}}(\mathscr{L}(Y_{t+s}), \mathscr{L}(Y_t)P_s) = 0.$$



1. Benaïm (1999), Dynamics of stochastic approximation algorithms

Soient $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique et $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller.

Pseudo-trajectoire asymptotique [1]

On dit que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une pseudo-trajectoire asymptotique de $(P_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $T > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{0\leq s\leq T} d_{\mathscr{F}}(\mathscr{L}(Y_{t+s}), \mathscr{L}(Y_t)P_s) = 0.$$

On travaille avec

$$d_{\mathscr{F}}(\mu,\nu) = \sup_{f\in\mathscr{F}} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|.$$

1. Benaïm (1999), Dynamics of stochastic approximation algorithms

Dans la suite, $(y_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov inhomogène quelconque et $(Y_t)_{t \geq 0}$ le processus interpolé correspondant.

1. Benaïm, B., Cloez (201?), Ergodicity of inhomogeneous Markov chains through asymptotic pseudotrajectories

Dans la suite, $(y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov inhomogène quelconque et $(Y_t)_{t\geq 0}$ le processus interpolé correspondant.

Théorème 1 (Benaïm, B., Cloez)[1]

Si, $\forall T > 0, \forall f \in \mathscr{F}$,

(H1) $$|(\mathcal{L}_n - \mathcal{L})f(y)| \leq C \left(\sum_{k=0}^{d} |y|^k \right) \left(\sum_{k=0}^{N} \|f^{(k)}\|_\infty \right) \varepsilon_n,$$

(H2) $$\forall j \leq N, \quad \|(P_s f)^{(j)}\|_\infty \leq C_T \sum_{k=0}^{N} \|f^{(k)}\|_\infty,$$

(H3) $$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|y_n|^d] < +\infty,$$

alors $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une pseudo-trajectoire asymptotique de $(P_t)_{t\geq 0}$.

1. Benaïm, B., Cloez (201?), Ergodicity of inhomogeneous Markov chains through asymptotic pseudotrajectories

Dans la suite, $(y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov inhomogène quelconque et $(Y_t)_{t\geq 0}$ le processus interpolé correspondant.

Théorème 1 (Benaïm, B., Cloez)[1]

Si, $\forall T > 0$, $\forall f \in \mathscr{F}$,

$$\text{(H1)} \qquad |(\mathcal{L}_n - \mathcal{L})f(y)| \leq C \left(\sum_{k=0}^{d} |y|^k\right) \left(\sum_{k=0}^{N} \|f^{(k)}\|_\infty\right) \varepsilon_n,$$

$$\text{(H2)} \qquad \forall j \leq N, \quad \|(P_s f)^{(j)}\|_\infty \leq C_T \sum_{k=0}^{N} \|f^{(k)}\|_\infty,$$

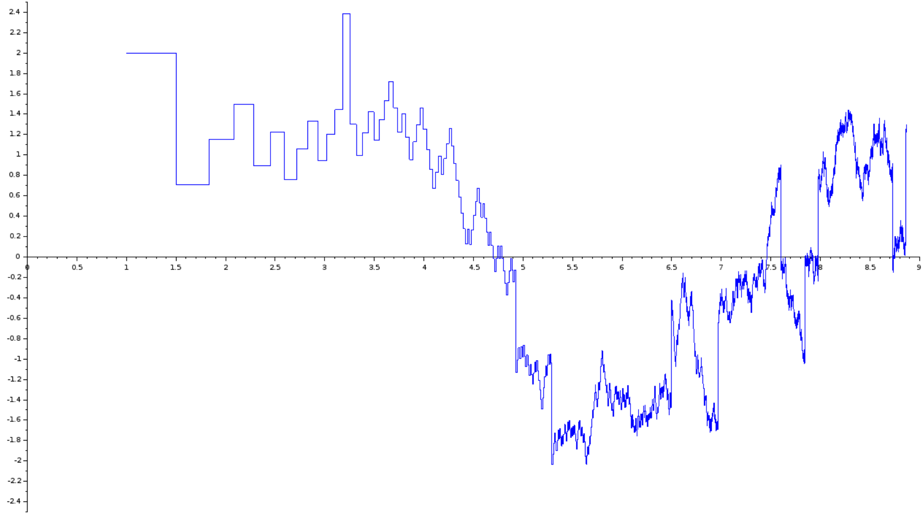
$$\text{(H3)} \qquad \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|y_n|^d] < +\infty,$$

alors $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une pseudo-trajectoire asymptotique de $(P_t)_{t\geq 0}$.

Dans notre cas,

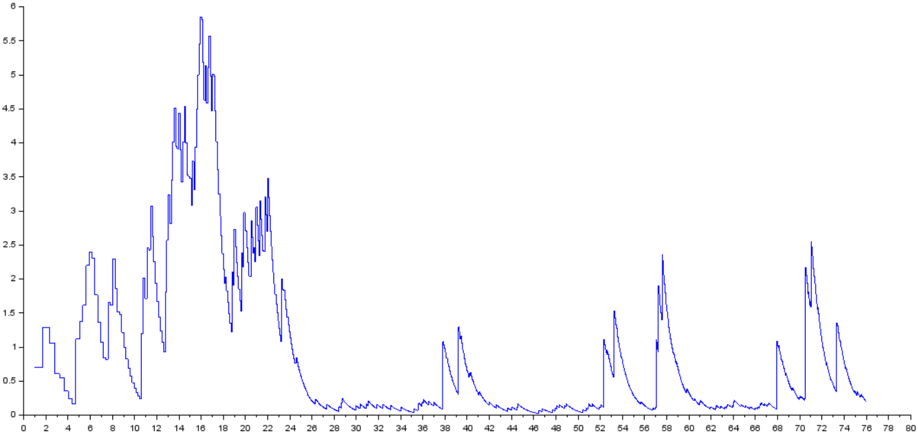
$$\mathscr{F} = \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}), \quad N = 3, \quad d = 3, \quad \varepsilon_n = \gamma_n.$$

1. Benaïm, B., Cloez (201?), Ergodicity of inhomogeneous Markov chains through asymptotic pseudotrajectories



Convergence vers une diffusion avec sauts.

$$\gamma_n = \frac{1}{n}, \qquad x_k = \begin{cases} \pm 1 & \text{avec proba. } 1 - \sqrt{\gamma_k} \\ \pm \gamma_k^{-1/2} & \text{sinon} \end{cases}, \qquad y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$



Convergence vers un processus de Markov déterministe par morceaux.

$$\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

(y_n) est l'algorithme de bandit pénalisé renormalisé [1]

1. Lamberton, Pagès (2008), A penalized bandit algorithm

Théorème 2 (Benaïm, B., Cloez)

Si, de plus, $\gamma_n = n^{-1}$ et

(H4) $$d_{\mathscr{G}}(\mu P_t, \pi) \leq Ce^{-vt},$$

(H5) $$C_T \leq Ce^{rT},$$

alors, pour tout $u < \frac{v}{1+r+v}$,

$$d_{\mathscr{F} \cap \mathscr{G}}(\mathscr{L}(Y_t), \pi) \leq \widetilde{C}e^{-ut}.$$