



# Mosaïques de Voronoi sur une surface riemannienne

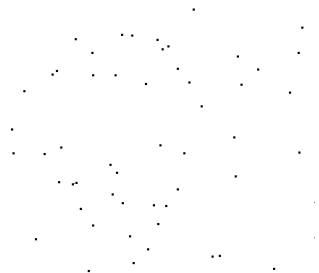
Aurélié Chapron

Modal'X (Paris Ouest) et LMRS (Rouen)

Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens 2016



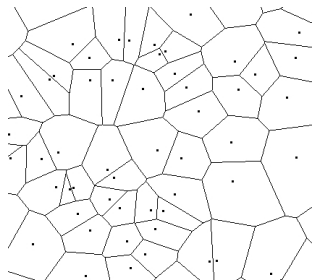
# Processus de Poisson



$\Phi$  est un processus ponctuel de Poisson (PPP) homogène d'intensité  $\lambda$  sur  $(E, d)$  si

- pour tout  $B$  borélien tel que  $\text{vol}(B) < \infty$ ,  $\#(\Phi \cap B) \sim \mathcal{P}(\lambda \text{vol}(B))$
- pour tous  $B_1, \dots, B_n$  boréliens disjoints tels que  $\text{vol}(B_i) < \infty$ ,  $\#(\Phi \cap B_1), \dots, \#(\Phi \cap B_n)$  sont indépendantes

# Mosaïque de Voronoi



$\Phi$  PPP sur  $(E, d)$  espace métrique,  
 $x \in \Phi$ .

La cellule de Voronoi associée à  $x$  est

$$C(x, \Phi) = \{y \in E, d(x, y) \leq d(x', y), \forall x' \in \Phi\}$$

# Motivation

**But** : Etablir un lien entre les caractéristiques moyennes des cellules de Voronoi et les caractéristiques locales de la surface

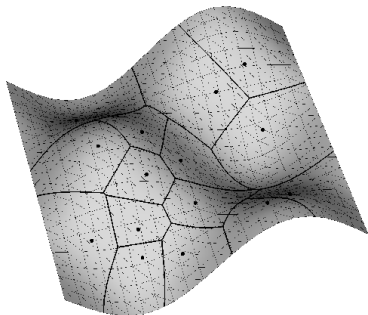


image:R.Kunze

# Cadre

- $S$  surface riemannienne munie de sa métrique  $d$ ,
- $dx$  la mesure d'aire associée,
- $\Phi$  PPP d'intensité  $\lambda dx$  et  $x_0 \in S$ , déterministe, ajouté à  $\Phi$ ,
- La cellule de Voronoi de  $x_0$  est définie par

$$\mathcal{C} = C(x_0, \Phi \cup \{x\}) = \{y \in S, d(x_0, y) \leq d(x, y), \forall x \in \Phi\}$$

- $N$  le nombre de sommets de  $\mathcal{C}$



# Outline

- 1 Le plan et la sphère
  - La plan
  - La sphère de courbure  $K$
- 2 Généralisation à une surface quelconque
  - Les différences/difficultés
  - Les solutions
  - Développement du nombre moyen de sommets

# Résultat

Par stationnarité, dans le plan, on peut prendre  $x_0 = 0$ .

# Résultat

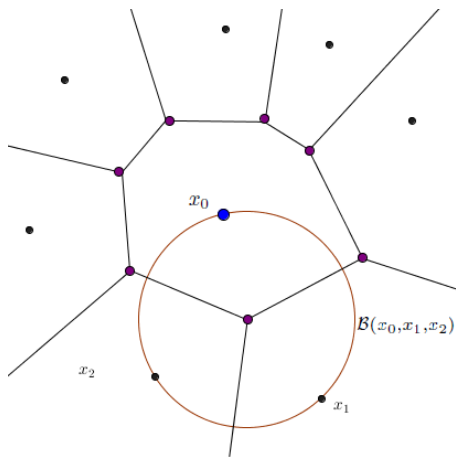
Par stationnarité, dans le plan, on peut prendre  $x_0 = 0$ .

On a

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = 6$$



# Expression du nombre de sommets



# Calcul du nombre moyen de sommets

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = \mathbb{E}\left[ \sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}} \right]$$

# Formule de Mecke-Slivnyak

Soit  $\Phi$  un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ ,  $f$  une fonction mesurable positive, invariante par permutation.

## Formule de Mecke-Slivnyak

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{\{x_1, \dots, x_n\} \subset \Phi \neq \emptyset} f(x_1, \dots, x_n, \Phi) \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} \int \dots \int \mathbb{E}[f(x_1, \dots, x_n, \Phi \cup \{x_1, \dots, x_n\})] dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

# Calcul du nombre moyen de sommets

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = \mathbb{E}\left[ \sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_{\{B(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}} \right]$$

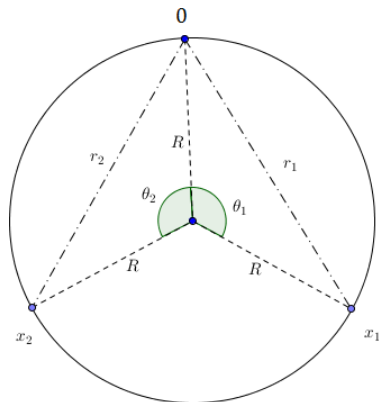
## Calcul du nombre moyen de sommets

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(\mathcal{C})] &= \mathbb{E}\left[ \sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}} \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \iint_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(x_0, x_1, x_2))} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

## Calcul du nombre moyen de sommets

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[N(\mathcal{C})] &= \mathbb{E}\left[ \sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}} \right] \\
 &= \frac{\lambda^2}{2} \iint_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(x_0, x_1, x_2))} dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(x_0, x_1, x_2))} r_1 r_2 dr_1 d\varphi_1 dr_2 d\varphi_2
 \end{aligned}$$

# Changement de variables



$$r_1 = 2 \sin \left( \frac{\theta_1}{2} \right) R$$

$$r_2 = 2 \sin \left( \frac{\theta_2}{2} \right) R$$

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2}$$

$$\varphi_2 = \varphi + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}$$

## Calcul du nombre moyen de sommets

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[N(\mathcal{C})] &= \mathbb{E}[N(\mathcal{C}(0, \Phi \cup \{0\}))] \\
 &= \mathbb{E}\left[\sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}}\right] \\
 &= \frac{\lambda^2}{2} \iint_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(0, x_1, x_2))} dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(0, x_1, x_2))} r_1 r_2 dr_1 d\varphi_1 dr_2 d\varphi_2
 \end{aligned}$$



## Calcul du nombre moyen de sommets

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] &= \mathbb{E}[N(\mathcal{C}(0, \Phi \cup \{0\}))] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}}\right] \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \iint_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(0, x_1, x_2))} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int_{r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(0, x_1, x_2))} r_1 r_2 dr_1 d\varphi_1 dr_2 d\varphi_2 \\
&= 2\lambda^2 \int_{R, \varphi, \theta_1, \theta_2} e^{-\lambda \pi R^2} R^3 \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \left| \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right| dR d\varphi d\theta_1 d\theta_2
\end{aligned}$$

## Calcul du nombre moyen de sommets

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] &= \mathbb{E}[N(\mathcal{C}(0, \Phi \cup \{0\}))] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}}\right] \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \iint_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(0, x_1, x_2))} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int_{r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(0, x_1, x_2))} r_1 r_2 dr_1 d\varphi_1 dr_2 d\varphi_2 \\
&= 2\lambda^2 \int_{R, \varphi, \theta_1, \theta_2} e^{-\lambda \pi R^2} R^3 \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \left| \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right| dR d\varphi d\theta_1 d\theta_2 \\
&= 6
\end{aligned}$$

# Stratégie

Adapter la méthode à la géométrie de la sphère



Par homogénéité, on peut choisir  $x_0 =$  le pôle Nord.

- 1 Formule de Mecke-Slivnyak,
- 2 Coordonnées polaires (sphériques),
- 3 Changement de variables ...



# Calcul du nombre moyen de sommets

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = \mathbb{E}\left[ \sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}_1(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}} + \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}_2(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}} \right]$$

## Calcul du nombre moyen de sommets

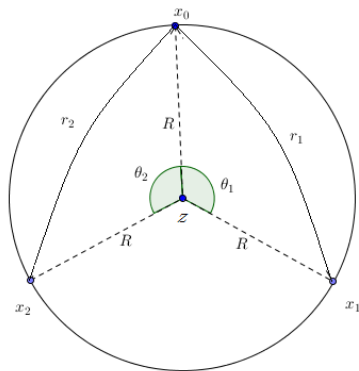
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(\mathcal{C})] &= \mathbb{E}\left[ \sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}_1(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}} + \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}_2(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}} \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \iint_{x_1, x_2 \in \mathcal{S}(K)} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}_1(x_0, x_1, x_2))} + e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}_2(x_0, x_1, x_2))} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$



## Calcul du nombre moyen de sommets

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[N(\mathcal{C})] &= \mathbb{E}\left[ \sum_{x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}_1(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}} + \mathbb{1}_{\{\mathcal{B}_2(0, x_1, x_2) \cap \Phi = \emptyset\}} \right] \\
 &= \frac{\lambda^2}{2} \iint_{x_1, x_2 \in \mathcal{S}(K)} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}_1(x_0, x_1, x_2))} + e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}_2(x_0, x_1, x_2))} dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2} \left( e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}_1(x_0, x_1, x_2))} + e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}_2(x_0, x_1, x_2))} \right) \\
 &\quad \times \frac{\sin(\sqrt{K}r_1)}{\sqrt{K}} \frac{\sin(\sqrt{K}r_2)}{\sqrt{K}} dr_1 d\varphi_1 dr_2 d\varphi_2
 \end{aligned}$$

## Changement de variables



$$r_1 = \frac{2}{\sqrt{K}} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin(\sqrt{K}R)\right)$$

$$r_2 = \frac{2}{\sqrt{K}} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin(\sqrt{K}R)\right)$$

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos(\sqrt{K}R)\right)$$

$$\varphi_2 = \varphi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \cos(\sqrt{K}R)\right)$$



# Nombre moyen de sommets

Dans ces nouvelles coordonnées

$$\text{vol}(\mathcal{B}_1(x_0, x_1, x_2)) = \frac{2\pi}{K}(1 - \cos(\sqrt{K}R))$$

$$\text{vol}(\mathcal{B}_2(x_0, x_1, x_2)) = \frac{2\pi}{K}(1 + \cos(\sqrt{K}R))$$

Miles (1971)





# Nombre moyen de sommets

Dans ces nouvelles coordonnées

$$\text{vol}(\mathcal{B}_1(x_0, x_1, x_2)) = \frac{2\pi}{K}(1 - \cos(\sqrt{K}R))$$

$$\text{vol}(\mathcal{B}_2(x_0, x_1, x_2)) = \frac{2\pi}{K}(1 + \cos(\sqrt{K}R))$$

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = 6 - \frac{3K}{\pi\lambda} + e^{-\frac{4\pi\lambda}{K}} \left( \frac{3K}{\pi\lambda} + 6 \right)$$

Miles (1971)

# Les difficultés

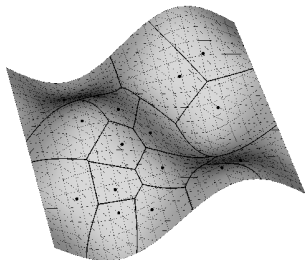


image de R.Kunze

- Besoin de définir les coordonnées polaires sur  $S$  et l'élément de surface.

# Les difficultés

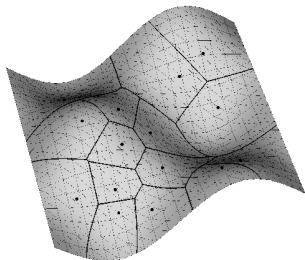


image de R.Kunze

- Besoin de définir les coordonnées polaires sur  $S$  et l'élément de surface.
- Absence de formules de trigonométrie : pas de changement de variables explicite.

# Les difficultés

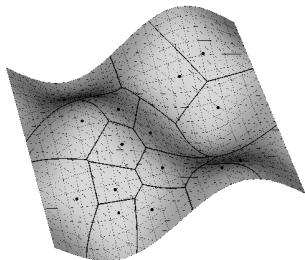
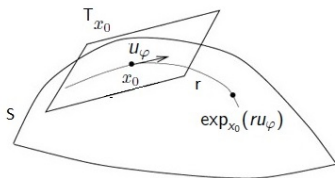


image de R.Kunze

- Besoin de définir les coordonnées polaires sur  $S$  et l'élément de surface.
- Absence de formules de trigonométrie : pas de changement de variables explicite.
- Pas d'expression exacte du volume de la boule géodésique.

# L'application exponentielle



Au voisinage de  $x_0$ ,  $S$  peut toujours être paramétré par les coordonnées polaires géodésiques  $(r, \varphi)$ , ie

$$x = \exp_{x_0}(ru_\varphi)$$

# Théorème de Rauch

$$dx = f(r, \varphi) dr d\varphi$$

Notons  $K$  la courbure gaussienne.

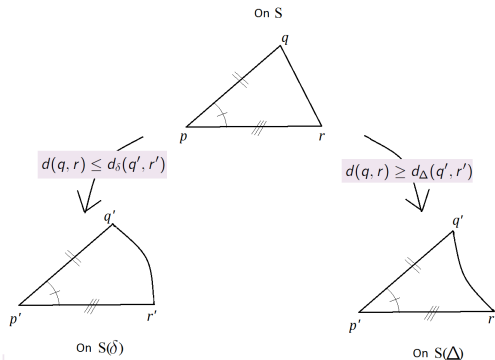
## Théorème de Rauch (1951)

Si  $0 < \delta \leq K \leq \Delta$

$$\frac{\sin(\sqrt{\Delta}r)}{\sqrt{\Delta}} \leq f(r, \varphi) \leq \frac{\sin(\sqrt{\delta}r)}{\sqrt{\delta}}$$

# Théorème de Toponogov

Si  $\delta \leq K \leq \Delta$



# Approximation du volume d'une boule géodésique

## Théorème de Bertrand-Diquet-Puiseux (1848)

Quand  $R \rightarrow 0$ ,  $x \in S$

$$\text{vol}(\mathcal{B}(z, R)) = \pi R^2 - \frac{K(z)\pi}{12} R^4 + o(R^4)$$



# Stratégie

On peut à nouveau appliquer la formule de Mecke-Slivnyak

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = \frac{\lambda^2}{2} \iint_{x_1, x_2 \in S} \sum_{\text{boules cir}} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(x_0, x_1, x_2))} dx_1 dx_2$$

# Stratégie

On peut à nouveau appliquer la formule de Mecke-Slivnyak

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = \frac{\lambda^2}{2} \iint_{x_1, x_2 \in S} \sum_{\text{boules cir}} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(x_0, x_1, x_2))} dx_1 dx_2$$

- ① Les points éloignés de  $x_0$  ont une contribution négligeable

# Stratégie

On peut à nouveau appliquer la formule de Mecke-Slivnyak

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = \frac{\lambda^2}{2} \iint_{x_1, x_2 \in \mathcal{S}} \sum_{\text{boules cir}} e^{-\lambda \text{vol}(\mathcal{B}(x_0, x_1, x_2))} dx_1 dx_2$$

- ① Les points éloignés de  $x_0$  ont une contribution négligeable
- ② Au voisinage de  $x_0$  : on utilise les théorèmes de comparaison pour écrire un développement de l'élément de surface.

# Développement de l'espérance

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = 12\pi^2 \lambda^2 \int_0^{R_{max}} e^{-\lambda(\pi R^2 - \frac{\pi K(x_0)R^4}{12} + o(R^4))} \times [R^3 - \frac{K(x_0)R^5}{2} + o(R^5)] dR + O(e^{-c\lambda})$$

# Développement de l'espérance

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = 12\pi^2 \lambda^2 \int_0^{R_{max}} e^{-\lambda(\pi R^2 - \frac{\pi K(x_0)R^4}{12} + o(R^4))} \times [R^3 - \frac{K(x_0)R^5}{2} + o(R^5)] dR + O(e^{-c\lambda})$$

Pour  $\lambda$  assez grand, la méthode de Laplace permet d'écrire

Nombre moyen de sommets

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C})] = 6 - \frac{3K(x_0)}{\pi\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$



# Take Home Message

- **Pour les surfaces**

- ↪ Lien entre le nombre moyen de sommets et la courbure gaussienne
- ↪ Résultat valable sur les surfaces à courbure négative (Isokawa 2000)
- ↪ Autres caractéristiques: aire, périmètre

- **Travaux en cours sur les variétés de dimension  $n$**

- ↪ Lien entre le nombre moyen de sommets et courbure scalaire
- ↪ **Perspective:** d'autres caractéristiques pour obtenir plus d'information sur la variété
- ↪ ...



**Merci de votre attention!**