Approche analytique pour le mouvement brownien réfléchi dans le quart de plan

Colloque "Jeunes Probabilistes et Statisticiens" 2016

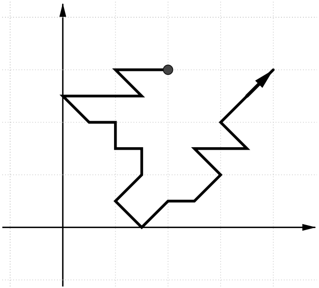
Sandro Franceschi
Sous la direction d'Irina Kourkova et de Kilian Raschel

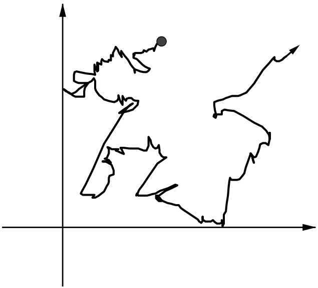
LPMA, Université Pierre et Marie Curie & LMPT, Université de Tours

19 avril 2016

Introduction

Processus dans le quart de plan.
Cas discret (marche aléatoire) ou continu (mouvement brownien) :





- Cas discret très étudié
- Cas continu étudié car utilisé pour approximer des large queuing network

Introduction

Objectifs :

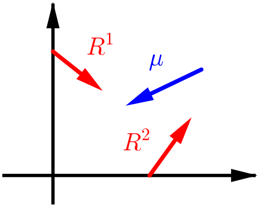
- Etendre au cas continu les méthodes analytiques développées dans le cas discret par Malyshev dans les années 1970.
- Calculer explicitement les fonctions génératrices des mesures invariantes grâce à des problèmes frontières.
- Étudier l'asymptotique des mesures invariantes avec des méthodes de type point col.

Plan

Mouvement brownien réfléchi dans $\mathbb{R}_+^2$

Soient

$$\begin{cases} (W_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \text{ un mouvement brownien plan de variance } \Sigma \\ \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ une dérive} \\ R = (R_1, R_2) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ une matrice de rebond} \end{cases}$$



Mouvement brownien réfléchi dans $\mathbb{R}_+^2$

Définition

On définit Z comme

$$Z_t = Z_0 + W_t + \mu t + RL_t \quad \in \mathbb{R}_+^2$$

où L_t^i est un processus continu et croissant qui s'accroit uniquement lorsque $Z_i(.) = 0$ c'est à dire que le processus touche le bord.

On a $\int_{\{t : Z_t^i > 0\}} \mathrm{d}L_t^i = 0$.

- Un tel processus existe si et seulement si $r_{11} > 0$, $r_{22} > 0$ et soit $r_{12}, r_{21} > 0$ soit $r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21} > 0$.

Critères de récurrence

Définition

Z est dit récurrent positif si pour tout voisinage de zéro $V \subset \mathbb{R}_+^2$ de mesure de lebesgue positive on a $\mathbb{E}_x[\tau_V] < \infty$ pour tout point de départ $x \in \mathbb{R}_+^2$ où on a noté $\tau_V = \inf\{t \geqslant 0 : Z(t) \in V\}$.

Proposition

L'existence d'un unique processus Z récurrent positif admettant une unique mesure invariante est équivalent au fait que (Σ, μ, R) satisfait les conditions suivantes :

$$r_{11} > 0, \quad r_{22} > 0, \quad r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} > 0$$

$$r_{22}\mu_1 - r_{12}\mu_2 < 0, \quad r_{11}\mu_2 - r_{21}\mu_1 < 0.$$

Mesure invariante

- Soit π la mesure invariante sur $\mathbb{R}_+^2$ de Z on a pour tout t

$$\mathbb{E}_\pi[f(Z(t))] = \int_{\mathbb{R}_+^2} f(z)\pi(\mathrm{d}z)$$

- D'après les théorèmes ergordiques la mesure invariante est la proportion moyenne du temps que le processus passe en un point.

$$\pi(A) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[\frac{1}{t}\int_0^t 1_A(Z(u))\mathrm{d}u]$$

- Qu'en est-il des frontières ?

Mesure invariante et frontières

- On définit ν_1 et ν_2 les mesures sur les frontières, telles que

$$\nu_i(A) = \mathbb{E}_\pi[\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{Z(u)\in A\}} \mathrm{d}L_u^i].$$

- On peut montrer que

$$\forall t \quad \mathbb{E}_\pi[\frac{1}{t}\int_0^t f(Z(u))\mathrm{d}L_u^i] = \int_{\mathbb{R}_+^2} f(x)\nu_i(\mathrm{d}x)$$

  C'est l'analogue de la formule $\mathbb{E}_\pi[f(Z(t))] = \int_{\mathbb{R}_+^2} f(z)\pi(\mathrm{d}z)$

- On constate que ν_1 et ν_2 sont en quelque sorte des mesures invariantes sur les frontières.

Fonction génératrice des mesures invariantes

- La fonction génératrice de la mesure invariante est la transformée de Laplace

$$\phi(\theta) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \exp(\langle\theta|z\rangle)\pi(\mathrm{d}z) = \mathbb{E}_\pi[\exp(\langle\theta|Z\rangle)]$$

- Sur les frontières on définit de manière analogue les fonctions génératrices :

$$\phi_2(\theta_1) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{\theta_1 z}\nu_2(\mathrm{d}z) = \mathbb{E}_\pi[\int_0^1 e^{\theta_1 Z_t^1}\mathrm{d}L_t^2]$$

$$\phi_1(\theta_2) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{\theta_2 z}\nu_1(\mathrm{d}z) = \mathbb{E}_\pi[\int_0^1 e^{\theta_2 Z_t^2}\mathrm{d}L_t^1]$$

Plan

Étapes clés

- Obtenir l'équation fonctionnelle
- Étudier le noyau $\gamma(\theta) = 0$ et la surface de Riemann associée (sphère, tore, ...)
- Déterminer les domaines de convergence des fonctions génératrices, les prolonger meromorphiquement sur la surface de Riemann
- Établir un problème frontière et le résoudre (trouver les fonctions conforme de collage)
- Inverser la transformée de Laplace, étudier les singularités, utiliser des méthodes du type point col et déterminer l'asymptotique

Équation fonctionnelle

L'équation fonctionnelle suivante est une formule clé pour étudier la mesure invariante qui relie les différentes fonctions génératrices.

Théorème

$$\gamma(\theta)\phi(\theta) = \gamma_1(\theta)\phi_2(\theta_1) + \gamma_2(\theta)\phi_1(\theta_2)$$

où

$$\begin{cases} \gamma(\theta) = -\frac{1}{2}(\sigma_{11}\theta_1^2 + \sigma_{22}\theta_2^2 + 2\sigma_{12}\theta_1\theta_2) - (\mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2), \\ \gamma_1(\theta) = \langle R^1|\theta\rangle = r_{11}\theta_1 + r_{21}\theta_2, \\ \gamma_2(\theta) = \langle R^2|\theta\rangle = r_{12}\theta_1 + r_{22}\theta_2. \end{cases}$$

C'est une équation de balance qui relie ce qui se passe sur les frontières et à l'intérieur du quart de plan.

Démonstration de l'équation fonctionnelle

- Soit L le générateur de $(W_t + \mu t)_{t \geq 0}$. On a

$$Lf(z) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z) + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z).$$

- Pour $i = 1, 2$ on définit,

$$D_i f(x) = \langle R^i | \nabla f \rangle$$

qui peuvent être interprétés comme les générateurs sur les frontières.

Démonstration de l'équation fonctionnelle

- On a alors la "basic adjoint relationship" :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}_+^2) \quad \int_{\mathbb{R}_+^2} Lf(z)\pi(\mathrm{d}z) + \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{R}_+^2} D_i f(z)\nu_i(\mathrm{d}z) = 0$$

Remarque : C'est l'analogue de $\pi(P-I)=0$ pour les chaînes de Markov, $\pi Q = 0$ pour les chaînes de Markov à temps continu ou encore $\int \mathcal{G} f d\mu = 0$ pour les processus de Markov où $\mathcal{G}$ est le générateur.
$\hookrightarrow$ Il suffit de prendre $f = \exp\langle\theta|.\rangle$ pour obtenir l'équation fonctionnelle.

Surface de Riemann

- On introduit la surface de Riemann $\mathcal{S}$ comme les zéros du noyau :

$$\mathcal{S} = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{C}^2 : \gamma(\theta_1, \theta_2) = 0)\}$$

- On s'intéresse aussi à la fonction algébrique bi-valuée $\Theta_2(\theta_1)$ associé à $\mathcal{S}$ définit par

$$\gamma(\theta_1, \Theta_2(\theta_1)) = 0$$

  et qui a deux points de branchement $\theta_1^{\pm}$.
  De même on définit Θ_1 et ses points de branchement $\theta_2^{\pm}$.
- Ici $\mathcal{S}$ est une sphère. Dans le cas discret c'est un tore.

Noyau

- Le noyau γ peut s'écrire $\gamma(\theta_1, \theta_2) = a(\theta_1)\theta_2^2 + b(\theta_1)\theta_2 + c(\theta_1)$. Les expressions de ses branches sont données par

$$\Theta_2^{\pm}(\theta_1) = \frac{-b(\theta_1) \pm \sqrt{d(\theta_1)}}{2a(\theta_1)},$$

où $d(\theta_1) = b^2(\theta_1) - 4a(\theta_1)c(\theta_1)$ est le discriminant.

- Le polynôme d a deux zéros, notés $\theta_1^{\pm}$ qui sont les points de branchement de Θ_2.
- On remarque que d est négatif sur $(-\infty, \theta_1^-) \cup (\theta_1^+, \infty)$. Les branches $\Theta_2^{\pm}$ prennent des valeurs complexes conjuguées sur cet ensemble.

Groupe du processus

- C'est le groupe $\langle\zeta,\eta\rangle$ généré par ζ et η, données par

$$\zeta(\theta_1,\theta_2)=\left(\theta_1,\frac{c(\theta_1)}{a(\theta_1)}\frac{1}{\theta_2}\right),\quad \eta(\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{\widetilde{c}(\theta_2)}{\widetilde{a}(\theta_2)}\frac{1}{\theta_1},\theta_2\right).$$

- Par construction si $\gamma(\theta_1,\theta_2)=0$ alors $\gamma(\zeta(\theta_1,\theta_2))=\gamma(\eta(\theta_1,\theta_2))=0$. Ce sont donc des automorphismes de $\mathcal{S}$. On a

$$\zeta(\theta_1,\Theta_2^+(\theta_1))=\zeta(\theta_1,\Theta_2^-(\theta_1))$$

- L'algébricité des fonctions génératrices dépend de la finitude du groupe.

Plan

Problème frontière

Soit $\theta_1 \in (-\infty, \theta_1^-)$. On pose $\theta_2 = \Theta_2^+(\theta_1)$ et donc $\overline{\theta_2} = \Theta_2^-(\theta_1)$. On a alors $(\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{S}$ et $(\theta_1, \overline{\theta_2}) \in \mathcal{S}$ $(\gamma(\theta_1, \theta_2) = \gamma(\theta_1, \overline{\theta_2}) = 0)$. Ainsi :

$$0 = \gamma_1(\theta_1, \theta_2)\phi_1(\theta_2) + \gamma_2(\theta_1, \theta_2)\phi_2(\theta_1)$$

$$0 = \gamma_1(\theta_1, \overline{\theta_2})\phi_1(\overline{\theta_2}) + \gamma_2(\theta_1, \overline{\theta_2})\phi_2(\theta_1)$$

On en déduit donc

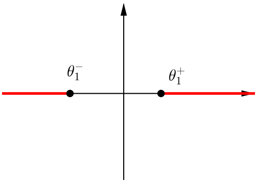
$$\phi_1(\overline{\theta_2}) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\theta_1, \theta_2)\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(\theta_1, \overline{\theta_2})\phi_1(\theta_2)$$

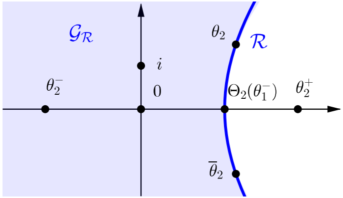
On pose alors

$$\mathcal{R} = \Theta_2^{\pm}((-\infty, \theta_1^-)).$$

Frontière du BVP

$$\mathcal{R} = \Theta_2^{\pm}((-\infty, \theta_1^-)). \tag{1}$$





La courbe $\mathcal{R}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ est le domaine en bleu.

Énoncé du problème frontière (BVP)

On définit pour $\theta_2 \in \mathcal{R}$

$$G(\theta_2) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(\Theta_1^-(\theta_2), \theta_2)\frac{\gamma_2}{\gamma_1}(\Theta_1^-(\theta_2), \overline{\theta_2}).$$

Lemme

La fonction ϕ_1 satisfait les conditions du problème frontière (BVP) suivant :

1. *ϕ_1 est méromorphe sur $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ avec au plus un pole p d'ordre 1, et est bornée à l'infini ;*
2. *ϕ_1 est continue sur $\overline{\mathcal{G}_{\mathcal{R}}} \setminus \{p\}$ et*

$$\phi_1(\overline{\theta_2}) = G(\theta_2)\phi_1(\theta_2), \qquad \forall \theta_2 \in \mathcal{R}.$$

Gluing function

La fonction w (conformal gluing function) colle ensemble les parties hautes et basses de l'hyperbole $\mathcal{R}$. Elle peut être exprimée en terme de polynôme de Chebyshev généralisé,

$$T_a(x) = \cos(a \arccos(x)) = \frac{1}{2}\left\{ \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^a + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^a \right\}$$

comme suit :

$$w(\theta_2) = T_{\frac{\pi}{\beta}}\left(- \frac{2\theta_2 - (\theta_2^+ + \theta_2^-)}{\theta_2^+ - \theta_2^-} \right),$$

où on a noté

$$\beta = \arccos - \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}.$$

Résolution du BVP : cas des rebonds orthogonaux

Dans le cas d'une réflexion orthogonale on peut se ramener à un BVP plus simple avec $G = 1$. Grâce à un lemme des invariants et à la gluing function on obtient le résultat suivant :

Théorème (2016)

Soit R la matrice identité. La transformée de Laplace ϕ_1 est égale à

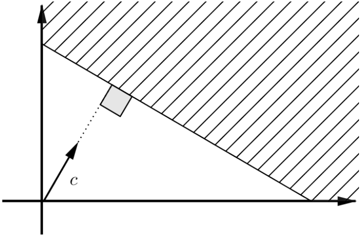
$$\phi_1(\theta_2) = \frac{-\mu_1 w'(0)}{w(\theta_2) - w(0)} \theta_2.$$

- Cas général plus complexe à venir...

Asymptotique de la distribution stationnaire

Théorème (Dai-Miyazawa 2011)

Si $Z(\infty) \sim \pi$ on a $\mathbb{P}[\langle c|Z(\infty)\rangle > x] \sim_{x\to\infty} bx^{\kappa_c}e^{-\alpha_c x}$ Les constantes α_c et κ_c peuvent être calculées explicitement et κ_c ne peut prendre que les valeurs suivantes : $-3/2$, $-1/2$, 0 ou 1.



C'est l'équivalent de la mesure π de l'ensemble hachuré sur le dessin lorsque $x \to \infty$.

Méthode pour déterminer l'asymptotique

On cherche à faire un développement asymptotique dans toutes les directions, c'est à dire de $\pi(x_1, x_2)$ quand $x_1, x_2 \to \infty$ et $x_1/x_2 \to \tan(\alpha)$ pour $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Méthode :

- Prolonger méromorphiquement les fonctions génératrices sur $\mathcal{S}$
- Étudier les singularités
- Inverser les transformées de Laplace
- Utiliser des méthodes du type point col

Asymptotique dans toutes les directions

Théorème (2016)

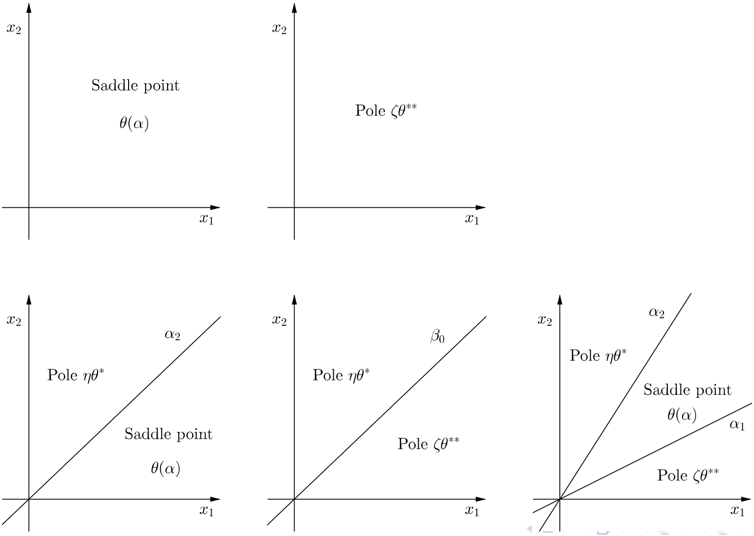
Soit $\alpha \in (0, \pi/2)$. Quand $x_1, x_2 \to \infty$ et $x_2/x_1 \to \tan(\alpha)$ on peut avoir selon les paramètres

$$\pi(x_1, x_2) = (1 + o(1)) \cdot \begin{cases} \frac{C_0}{\sqrt{r}} e^{-\langle (x_1, x_2) | \theta(\alpha) \rangle}, \\ C_1 e^{-\langle (x_1, x_2) | \eta\theta^* \rangle}, \\ C_2 e^{-\langle (x_1, x_2) | \zeta\theta^{**} \rangle}, \end{cases}$$

où C_0, C_1 et C_2 sont des constantes qui peuvent être calculées en fonctions de ϕ_1 et ϕ_2 et des paramètres.

Les taux de décroissance exponentiel proviennent soit des pôles soit du point col.
On peut aussi trouver le développement asymptotique complet.

Asymptotique en fonction de la direction



Merci pour votre attention !

- J. G. DAI AND M. MIYAZAWA - "Reflecting brownian motion in two dimensions : Exacts asymptotics for the stationary distribution", *Stochastic Systems*, **1** (2011), p. 146-208.
- I. KURKOVA AND V. MALYSHEV - "Martin boundary and elliptic curves", *Markov Process and Related Fields*, **4** (1998), p. 203-272.
- G. FAYOLLE, R. IASNOGORODSKI AND V. MALYSHEV - *Random walks in the quarter-plane*, Application of Mathématics (New York), vol. 40, Springer, (1999).
- S. FRANCESCHI AND K. RASCHEL - "Tutte-s invariant approach for Brownian motion reflected in the quadrant", *arXiv : 1602.03054* (2016)
- S. FRANCESCHI AND I. KURKOVA - "Asymptotic expansion of stationary distribution for reflected brownian motion in the quadrant via analytic approach" *arXiv :1604.02918* (2016)