Grandes déviations de la mesure spectrale de matrices de covariance à queues non gaussiennes

Benjamin Groux

Colloque JPS
Avril 2016

Plan

1. Brève introduction aux matrices aléatoires
2. Grandes déviations en matrices aléatoires
3. Matrices de covariance à queues non gaussiennes

Plan

1. Brève introduction aux matrices aléatoires
2. Grandes déviations en matrices aléatoires
3. Matrices de covariance à queues non gaussiennes

Les deux modèles historiques :

- Matrice de Wigner : matrice hermitienne $X^{(n)}$ où les $X_{i,j}^{(n)}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, sont i.i.d.

Les deux modèles historiques :

- Matrice de Wigner : matrice hermitienne $X^{(n)}$ où les $X_{i,j}^{(n)}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, sont i.i.d.
- Matrice de covariance : matrice (hermitienne positive) $X^{(n,p)}(X^{(n,p)})^*$ où les $X_{i,j}^{(n,p)}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, sont i.i.d.

Les deux modèles historiques :

- Matrice de Wigner : matrice hermitienne $X^{(n)}$ où les $X_{i,j}^{(n)}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, sont i.i.d.
- Matrice de covariance : matrice (hermitienne positive) $X^{(n,p)}(X^{(n,p)})^*$ où les $X_{i,j}^{(n,p)}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, sont i.i.d.

Dans la suite, une matrice aléatoire $X^{(n)}$ désigne en fait une suite $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices aléatoires de taille $n \times n$.

Définition

Soit A une matrice hermitienne de taille n. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. La *mesure spectrale empirique* de A est la probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\mu_A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k} .$$

- Comportement global de la mesure spectrale empirique ?
- Comportement des plus grandes (plus petites) valeurs propres ?
- Comportement des valeurs propres non extrêmes ?
- Comportement des vecteurs propres ?

Soit $X^{(n)}$ une matrice de Wigner.

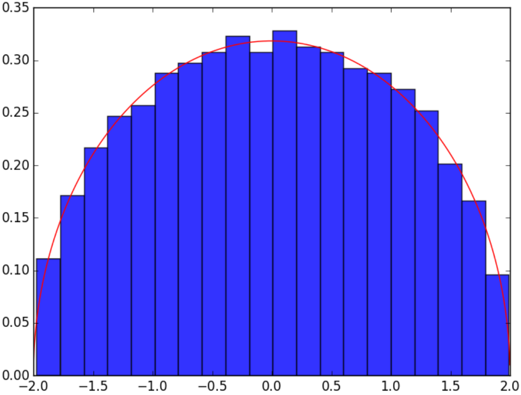
Théorème (Wigner, 1958)

Si $\mathbb{E}(X_{1,1}^{(n)}) = 0$ et $\mathbb{E}|X_{1,1}^{(n)}|^2 = 1$, alors quand $n \to +\infty$,

$$\text{p. s.} \quad \mu_{X^{(n)}/\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mu_{sc} \, ,$$

où

$$d\mu_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\,\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)\, dx \, .$$


0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

Soit $X^{(n,p)}(X^{(n,p)})^*$ une matrice de covariance.

Théorème (Marcenko-Pastur, 1967)

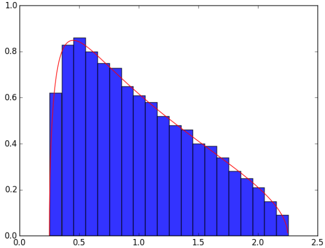
Si $\mathbb{E}(X_{1,1}^{(n,p)}) = 0$ et $\mathbb{E}|X_{1,1}^{(n,p)}|^2 = 1$, alors quand $n, p \to +\infty$ avec $\frac{n}{p} \to c \in]0, +\infty[$,

$$\text{p. s.} \qquad \mu_{X^{(n,p)}(X^{(n,p)})^*/p} \xrightarrow{\text{loi}} \mu_{MP,c} \, ,$$

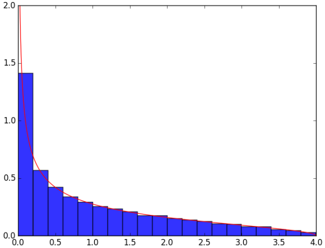
où

$$d\mu_{MP,c}(x) = \frac{\sqrt{(b_c - x)(x - a_c)}}{2\pi x c} \mathbf{1}_{[a_c, b_c]}(x) \, dx + \max\left(1 - \frac{1}{c}, 0\right) \delta_0$$

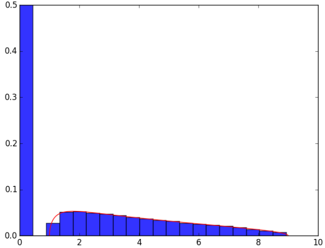
avec $a_c = (1 - \sqrt{c})^2$ et $b_c = (1 + \sqrt{c})^2$.


0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5

$c < 1$


0.0 0.5 1.0 1.5 2.0
0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0

$c = 1$


0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5
0 2 4 6 8 10

$c > 1$

Plan

1. Brève introduction aux matrices aléatoires
2. Grandes déviations en matrices aléatoires
3. Matrices de covariance à queues non gaussiennes

Définition

Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$. Une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires sur un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ satisfait le *principe de grandes déviations (PGD)* de vitesse v, gouverné par la fonction de taux I, dans la topologie $\mathcal{O}$, si pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a :

$$-\inf_{x\in\overset{\circ}{B}} I(x) \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{v(n)} \ln \mathbb{P}(Z_n \in B)$$

$$\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{v(n)} \ln \mathbb{P}(Z_n \in B) \le -\inf_{x\in\overline{B}} I(x)\,.$$

	Modèle unitairement invariant	Coefficients dans $\mathcal{S}_\alpha(a)$
Vitesse	n^2	$n^{1+\alpha/2}$
Matrice de Wigner $\mu_{X/\sqrt{n}}$	Ben Arous, Guionnet	Bordenave, Caputo
Matrice de covariance $\mu_{XX^*/p}$	Hiai, Petz	

	Modèle unitairement invariant	Coefficients dans $\mathcal{S}_\alpha(a)$
Vitesse	n^2	$n^{1+\alpha/2}$
Matrice de Wigner $\mu_{X/\sqrt{n}}$	Ben Arous, Guionnet	Bordenave, Caputo
Matrice de covariance $\mu_{XX^*/p}$	Hiai, Petz	

Définition

Soient $\alpha > 0$ et $a \in]0, +\infty]$. On dit qu'une v.a. Z appartient à $\mathcal{S}_\alpha(a)$ si

$$\lim_{t \to +\infty} -t^{-\alpha} \ln \mathbb{P}(|Z| \geq t) = a$$

et $|Z|$ et $Z/|Z|$ sont indépendants pour de grandes valeurs de $|Z|$.

Plan

1. Brève introduction aux matrices aléatoires
2. Grandes déviations en matrices aléatoires
3. Matrices de covariance à queues non gaussiennes

Théorème (Bordenave-Caputo, 2012)

Soit X une matrice de Wigner telle que $\mathrm{Var}(X_{1,1}) = 1$ et $X_{1,1} \in \mathcal{S}_\alpha(a)$ pour $\alpha \in]0,2[$ et $a \in]0,+\infty]$. La mesure spectrale $\mu_{X/\sqrt{n}}$ satisfait le PGD de vitesse $n^{1+\alpha/2}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de fonction de taux

$$J(\mu) = \begin{cases} \Phi(\nu) & \text{s'il existe } \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mu = \mu_{\mathrm{sc}} \boxplus \nu \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ est une bonne fonction de taux et $\boxplus$ désigne la convolution libre.

Théorème (G., 2015)

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice aléatoire telle que $c_n = \frac{n}{p} \to c \in]0, +\infty[$, $\mathrm{Var}(X_{1,1}) = 1$ et $X_{1,1} \in \mathcal{S}_\alpha(a)$ pour $\alpha \in]0, 2[$ et $a \in]0, +\infty]$. La mesure spectrale $\mu_{XX^t/p}$ vérifie le PGD de vitesse $n^{1+\alpha/2}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ de bonne fonction de taux

$$J'(\mu) = \begin{cases} \frac{a}{c^{\alpha/2}} m_{\alpha/2}(\nu) & \text{s'il existe } \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \text{ telle que} \\ & \quad \mu = \left(\sqrt{\nu} \boxplus_c \sqrt{\mu_{\mathrm{MP},c}}\right)^2 \\ & \quad \text{et } \nu(\{0\}) \geq \max\left(0, 1 - \frac{1}{c}\right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $m_p(\mu) = \int_{\mathbb{R}} |x|^p \, d\mu(x)$ est le p-ième moment d'une loi μ et $\boxplus_c$ désigne la convolution libre rectangulaire de rapport c.

On décompose

$$\frac{X}{\sqrt{p}} = A + B + C + D\,.$$

Étape 1 : B et D ne contribuent pas aux grandes déviations, i.e.

$$\mu_{XX^t/p} \approx \mu_{(A+C)(A+C)^t}\,.$$

Étape 2 : argument de couplage et propriété de **liberté asymptotique**, on obtient

$$\mu_{(A+C)(A+C)^t} \approx \left(\sqrt{\mu_{MP,c}} \boxplus_c \sqrt{\mu_{CC^t}}\right)^2\,.$$

Étape 3 : étude des grandes déviations de

$$C' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & C \\ \hline C^t & 0 \end{array}\right)\,.$$

Étape 4 : principe de contraction et équivalence exponentielle.

Modèle information-plus-bruit : $\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M\right)\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M\right)^t$.

Modèle information-plus-bruit : $\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M\right)\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M\right)^t$.

Théorème (G., 2015)

On suppose que $c_n = \frac{n}{p}$ est minoré et majoré par des réels strictement positifs. Soit $c > 0$. Il existe $s, t > 0$ et $c_{s,t} > 0$ tels que pour toute matrice aléatoire $Y \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ à coefficients i.i.d. vérifiant $\mathrm{Var}(Y_{1,1}) = 1$ et $\mathbb{E}(Y_{1,1}^4) < +\infty$, pour toute matrice déterministe $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tout n assez grand, on a

$$\begin{aligned} d_{s,t}\left(\mathbb{E}\,\mu_{(Y/\sqrt{p}+M)(Y/\sqrt{p}+M)^t}, \left(\sqrt{\mu_{MM^t}} \boxplus_c \sqrt{\mu_{\mathrm{MP},c}}\right)^2\right) \\ \leq \; c_{s,t}\left(\mathbb{E}\,|\mathring{Y}_{1,1}|^3 + \mathbb{E}(\mathring{Y}_{1,1}{}^4)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\mathrm{Tr}(MM^t)^{1/2}}{n}\right) \\ + \; c_{s,t}\left(|c_n - c| + \frac{1}{n} + \frac{\mathrm{Tr}(MM^t)^{1/2}}{n^{5/4}}\right) \end{aligned}$$

où $\mathring{Y} = Y - \mathbb{E}(Y)$.

	Cas gaussien	Cas non gaussien
Matrice de Wigner $\frac{Y}{\sqrt{p}} + M$ $\to \mu_{\mathrm{sc}} \boxplus \mu_M$	GUE déformée $\frac{1}{n}$	Wigner déformée $\frac{1}{\sqrt{n}}$
Matrice de covariance $\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M\right)\left(\frac{Y}{\sqrt{p}} + M\right)^t$ $\to \left(\sqrt{\mu_{\mathrm{MP},c}} \boxplus_c \sqrt{\mu_{MM^t}}\right)^2$	LOE déformée $\frac{1}{n} + \frac{\mathrm{Tr}(MM^t)^{1/2}}{n^{5/4}}$	Info-plus-bruit $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\mathrm{Tr}(MM^t)^{1/2}}{n}$

Merci de votre attention.