

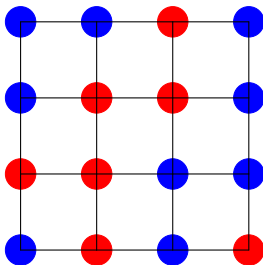
Continuum Random Cluster Model

Pierre HOUDEBERT
Université Lille 1

Directeur : David DEREUDRE, Université Lille 1

JPS 2016

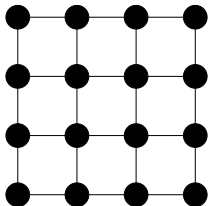
Modèle d'Ising



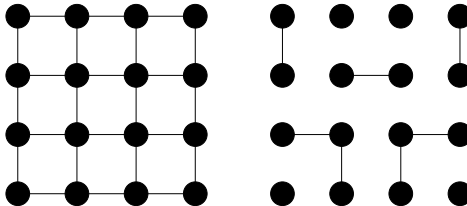
Pour $\omega \in \{-1, +1\}^\Lambda$ où Λ est un sous ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$.

$$P_{ising}(\omega) \propto \exp \left(-\beta \sum_{x,y \text{ voisins}} 1_{\sigma_x \neq \sigma_y} \right)$$

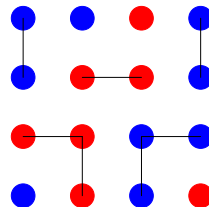
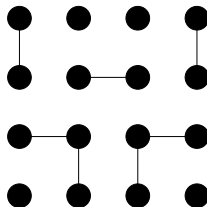
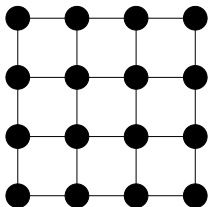
Couplage Ising/Random Cluster Model



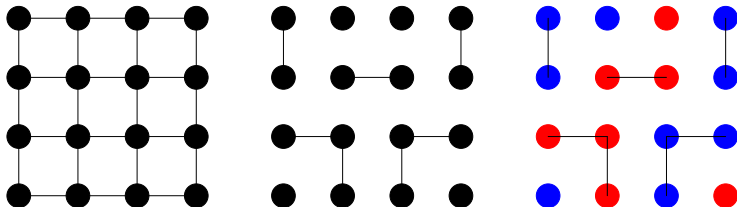
Couplage Ising/Random Cluster Model



Couplage Ising/Random Cluster Model



Couplage Ising/Random Cluster Model



$$P_{RCM}(\gamma) \propto 2^{N_{cc}(\gamma)} p^{\# \text{arêtes ouvertes}} (1-p)^{\# \text{arêtes fermés}}$$

Définition (Espaces des configurations)

- On note Ω l'espace des configurations localement finies de la forme $\omega = \bigcup_{i \in I} (x_i, R_i)$, avec $x_i \in \mathbb{R}^2$ et $R_i \in \mathbb{R}^+$.
- Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ et $\omega \in \Omega$ (resp $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$). On note ω_Λ la configuration $\omega \cap (\Lambda \times \mathbb{R}^+)$.

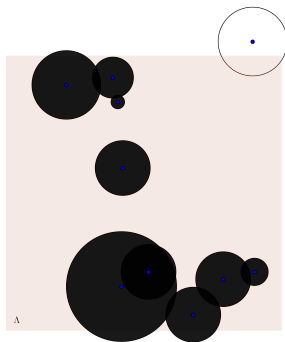


Figure : Une configuration ω_Λ

Définition

- On note $\pi^{z,Q}$ la loi sur Ω d'un processus de Poisson de mesure intensité $m(dx, dR) = z\lambda(dx)Q(dR)$.
- Finalement pour $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$, $\pi_\Lambda^{z,Q}$ désigne la restriction de $\pi^{z,Q}$ sur $\Lambda \times \mathbb{R}^+$.

1 Modèle en volume fini

2 Modèle en volume infini : Définitions et Théorèmes

Définition

Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ borné.

On définit le *Continuum Random Cluster Model* de paramètres z, Q, q dans la fenêtre bornée Λ par

$$P_{\Lambda}^{z, Q, q}(d\omega) = \frac{q^{N_{cc}(\omega)}}{Z_{\Lambda}} \pi_{\Lambda}^{z, Q}(d\omega).$$

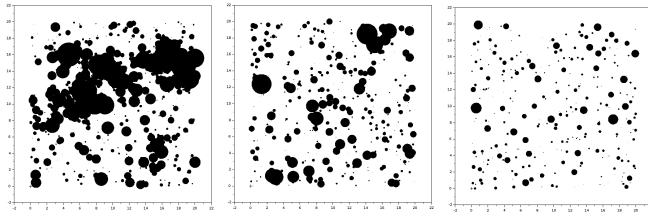


Figure : Fenêtre $\Lambda = [0, 20]^2$; Q exponentiel de moyenne 0.2 ; $z = 1$,
 $q = 1, 0.9$ et 1.1

Proposition 1 (FK représentation)

Soit q un entier strictement positif.

- *Générer une configuration non coloriée ω à partir du Random Cluster Model $P_{\Lambda}^{z,Q,q}$.*
- *Construire la configuration coloriée $\tilde{\omega}$ à partir de ω en coloriant chaque composante connexe de manière indépendante et uniformément parmi les q couleurs.*

Alors $\tilde{\omega}$ suit la loi d'un modèle de Widom-Rowlinson.

$$RCM + \text{coloration uniforme des cc} = WR$$

1 Modèle en volume fini

2 Modèle en volume infini : Définitions et Théorèmes

Définition

Soit $\omega \in \Omega$ et $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ borné. Alors la limite

$$N_{cc}^\Lambda(\omega) = \lim_{\Delta \rightarrow \mathbb{R}^2} N_{cc}(\omega_\Delta) - N_{cc}(\omega_{\Delta \setminus \Lambda}),$$

prise selon n'importe quelle suite d'ensemble (Δ_n) , existe et est finie.

Définition (CRCM(z, Q, q))

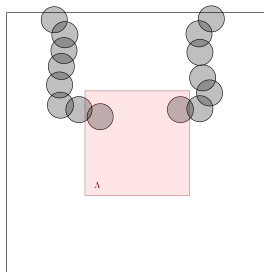
Une mesure de probabilité P sur Ω est un Continuum Random Cluster Model de paramètres z, Q, q , si elle vérifie, pour toutes fonctions f bornée et pour tous Λ borné,

$$\int f dP = \int \int f(\omega'_\Lambda \cup \omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda \cup \omega_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z, Q, q}(d\omega') P(d\omega).$$

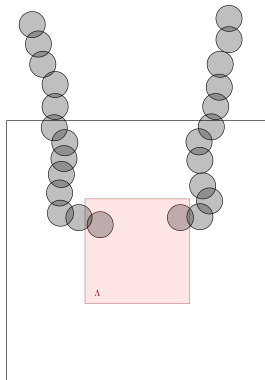
Théorème 1 (Dereudre-Houdebert)

- Si Q a un support compact (donc rayons bornées) alors pour tous $q > 0$ et $z > 0$ il existe un $\text{CRCM}(z, Q, q)$.
- Si $\int R^2 Q(dR) < \infty$ alors pour tous $q \geq 1$ et $z > 0$ il existe un $\text{CRCM}(z, Q, q)$.

Problème : Non-localité de N_{CC}^{Λ}



Problème : Non-localité de N_{CC}^{Λ}



$$\text{Cas } \int R^2 Q(dR) = \infty.$$

Proposition 2

Si Q vérifie $\int R^2 Q(dR) = \infty$, alors pour chaque $z > 0$ et $q > 0$, le processus ponctuel de Poisson $\pi^{z,Q}$ est un CRCM(z, Q, q) stationnaire.

Cas $\int R^2 Q(dR) = \infty$.

Proposition 2

Si Q vérifie $\int R^2 Q(dR) = \infty$, alors pour chaque $z > 0$ et $q > 0$, le processus ponctuel de Poisson $\pi^{z,Q}$ est un CRCM(z, Q, q) stationnaire.

Théorème 2 (Dereudre-Houdebert)

Si $\int R^2 Q(dR) = \infty$, alors pour tous q entier, il existe un $z_0 > 0$ tel que pour tous $z < z_0$, il existe un CRCM(z, Q, q) stationnaire, différent de $\pi^{z,Q}$ (qui est une solution triviale).

Cas $\int R^2 Q(dR) = \infty$.

Proposition 2

Si Q vérifie $\int R^2 Q(dR) = \infty$, alors pour chaque $z > 0$ et $q > 0$, le processus ponctuel de Poisson $\pi^{z,Q}$ est un CRCM(z, Q, q) stationnaire.

Théorème 2 (Dereudre-Houdebert)

Si $\int R^2 Q(dR) = \infty$, alors pour tous q entier, il existe un $z_0 > 0$ tel que pour tous $z < z_0$, il existe un CRCM(z, Q, q) stationnaire, différent de $\pi^{z,Q}$ (qui est une solution triviale).

Conjecture

Si $\int R^2 Q(dR) = \infty$, alors pour tous q entier, il existe $z_1 < \infty$ tel que, pour tout $z > z_1$, $\pi^{z,Q}$ est l'unique CRCM(z, Q, q) stationnaire.

Bibliographie

- Dereudre, Houdebert - Infinite Volume Continuum Random Cluster Model - EJP - 2015
- Georgii : Gibbs Measures and Phase Transitions.
- Dereudre, Drouilhet, Georgii : Existence of Gibbsian point processes with geometry-dependent interactions.
- Georgii, Häggström, Maes : The random geometry of equilibrium phases.