Etude qualitative du comportement en temps long de processus planaires aléatoirement commutés

JPS

Gabriel LAGASQUIE

LMPT Tours

Mardi 19 Avril

Un PDMP qu'est ce que c'est?

Un processus de Markov déterministe par morceaux $(X_t)_{t \geqslant 0}$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est caractérisé par :

- un flot $(\phi_s(x))_{s \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n}$
- un taux de saut $x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \lambda(x) \geqslant 0$
- un noyau de transition $Q(x, dy)$

Un PDMP qu'est ce que c'est?

On peut résumer la dynamique du processus (X_t) par son générateur infinitésimal :

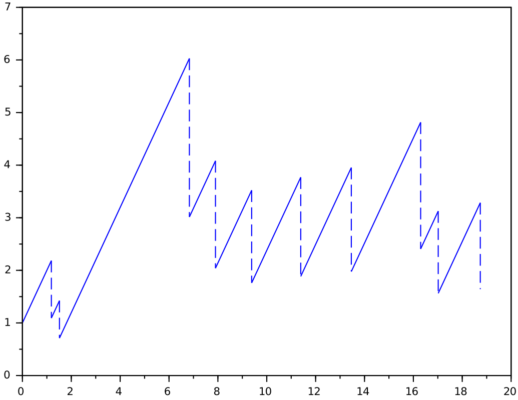
$$Lf(x) = F(x) \cdot \nabla f(x) + \lambda(x) \int_{\Omega} (f(y) - f(x)) Q(x, dy)$$

où F est le champ de vecteurs associé au flot ϕ.

Un exemple classique : le TCP Window Size

Son générateur :

$$Lf(x) = f'(x) + \lambda(x)\left(f(\frac{x}{2}) - f(x)\right)$$



Un cas particulier : les processus switchés

Processus du type $(X_t, I_t)_{t \geqslant 0} \in \mathbb{R}^n \times E$ où E est un ensemble fini caractérisé par :

- champs de vecteurs : $\mathcal{F}(x, i) = (F(x, i), 0)$
- taux de saut $\lambda(x, i)$
- noyau de saut $Q((x, i), (x, j))$ (noté $Q(x, i, j)$)

Un cas particulier : les processus switchés

Générateur infinitésimal :

$$Lf(x,i) = F(x,i) \cdot \nabla_x f(x,i) + \lambda(x,i) \sum_{j \neq i} Q(x,i,j)\,(f(x,j) - f(x,i))$$

Quelques exemples

"Lotka Volterra in fluctuating environment or how switching between beneficial environments can make survival harder"
Michel Benaïm et Claude Aubry

$$F_i(x, y) = \begin{cases} \alpha_i x(1 - a_i x - b_i y) \\ \beta_i x(1 - c_i x - b_i y) \end{cases}$$

Mais également des modélisations en biologie : synthèse de protéines, comportement de neurones, croissance et division cellulaire,...

Présentation du problème

On considère un processus $(X_t, I_t) \in \mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}$ vérifiant :

- (I_t) chaîne de Markov sur $\{0, 1\}$ avec des taux de sauts constants λ_0 et λ_1
- $\dot{X}_t = A_{I_t} X_t$ où $A_0, A_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à vp à parties réelles strictement négatives

"Sensitivity to switching rates in stochastically switched ODEs"
Lawley, Mattingly et Reed
"On the stability of planar randomly switched systems"
Benaïm, Le Borgne, Malrieu et Zitt

Présentation du problème

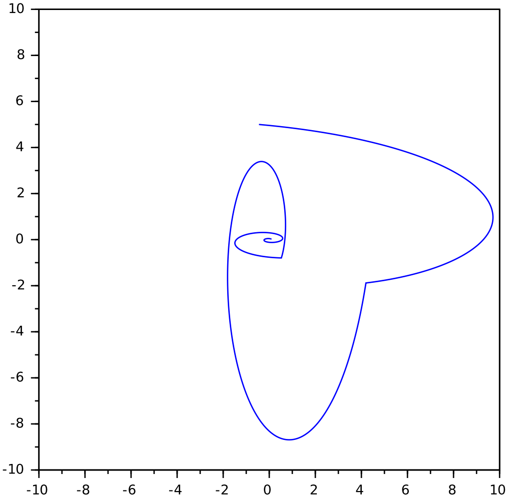
Pour $a > 0, b > 0$ on définit :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -a & b \\ -\frac{1}{b} & -a \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -a & \frac{1}{b} \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 = \beta u \quad \lambda_1 = \beta(1-u)$$

avec $\beta > 0$ et $u \in]0,1[$.
La mesure invariante de (I_t) est alors $u\delta_1 + (1-u)\delta_0$.
Les valeurs propres sont $-a \pm i$

Exemple de trajectoire



Le résultat

Une quantité intéressante à considérer pour étudier le comportement en temps long du processus :

$$\chi := \chi(a, b, \beta, u) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\|X_t\|\right) \quad \text{p.s}$$

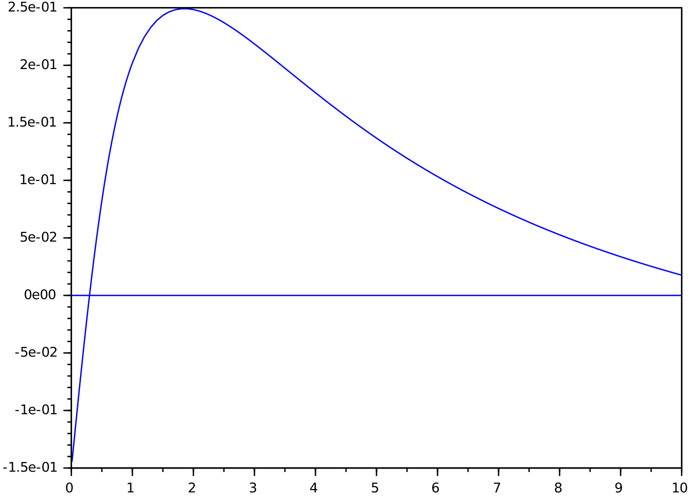
Théorème

Pour tous a, b et u,

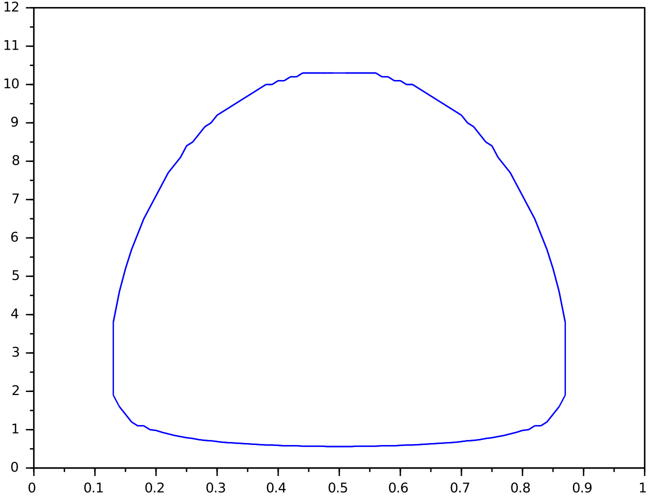
$$(i) \quad \chi \longrightarrow -a \quad \text{quand} \quad \begin{cases} \beta \to 0 \\ \beta \to +\infty \end{cases}$$

(ii) Pour tout β on peut choisir a et b tels que $\chi(\beta) > 0$.

Simulation de χ $(u = \frac{1}{2}, a = 0.15, b = 3)$



Zone de positivité de χ en fonction de u et β



Plan de la preuve : le processus angulaire

On passe en coordonnées polaires, entre les sauts, les coordonnées polaires vérifient :

$$\dot{R}_t = R_t \langle e_{\Theta_t}, A_{I_t} e_{\Theta_t} \rangle$$

$$\dot{\Theta}_t = \left\langle A_{I_t} e_{\Theta_t}, e_{\Theta_t + \pi/2} \right\rangle$$

Et donc :

$$R_t = R_0 \exp\left(\int_0^t \mathcal{A}(\Theta_s, I_s) ds \right)$$

avec $\mathcal{A}(\theta, i) = \langle e_\theta, A_i e_\theta \rangle$

Plan de la preuve : le processus angulaire

Le processus angulaire (Θ_t, I_t) est un PDMP sur $\mathbb{S}^1 \times \{0,1\}$ de générateur :

$$Lf(\theta, i) = d_i(\theta) f'(\theta, i) + \lambda_i (f(\theta, 1-i) - f(\theta, i))$$

avec :

$$d_0(\theta) = -b \sin^2\theta - \frac{1}{b}\cos^2\theta \quad \text{et} \quad d_1(\theta) = -\frac{1}{b}\sin^2\theta - b\cos^2\theta$$

(Θ_t, I_t) est récurrent ! Existence et unicité d'une probabilité invariante μ_β vérifiant :

$$\int_{\mathbb{S}_1 \times \{0,1\}} L_\beta f(\theta, i) d\mu_\beta(\theta, i) = 0$$

Plan de la preuve : la mesure invariante du processus angulaire

La probabilité invariante μ_β du processus $((\Theta_t, I_t))_{t\geq 0}$ est donnée par,

$$\mu_\beta(d\theta, i) = \rho_i(\theta)d\theta$$

où :

$$\rho_0 = \frac{\Phi}{d_0} \quad \text{et} \quad \rho_1 = \frac{C - \rho_0 d_0}{d_1};$$

$$d_0(\theta) = -b\sin^2\theta - \frac{1}{b}\cos^2\theta \quad \text{et} \quad d_1(\theta) = -\frac{1}{b}\sin^2\theta - b\cos^2\theta;$$

$$\Phi(\theta) = \left(K + \int_0^\theta \beta C(1-u)\frac{1}{d_1(\alpha)}e^{-\beta v(\alpha)}d\alpha\right)e^{\beta v(\theta)};$$

v est la primitive nulle en zéro de $-(\frac{u}{d_0} + \frac{1-u}{d_1})$;

K et C sont deux constantes explicitables

Plan de la preuve : obtention de χ

De :

$$R_t = R_0 \exp\left(\int_0^t \mathcal{A}(\Theta_s, I_s)ds\right)$$

on obtient :

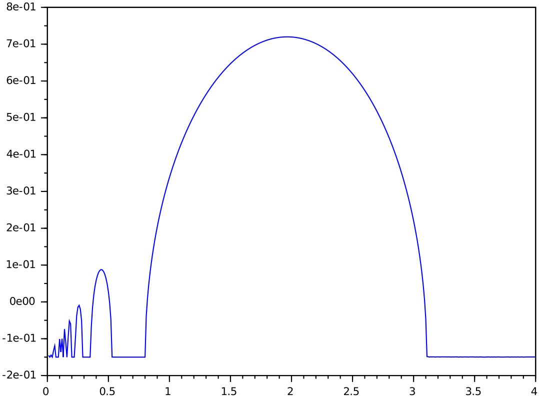
$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{R_t}{R_0}\right) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{A}(\Theta_s, I_s)ds$$

Le théorème ergodique nous dit alors que :

$$\chi = \int_0^{2\pi} \mathcal{A}(\theta, i)d\mu_\beta(\theta, i)$$

Et alors ? le cas périodique

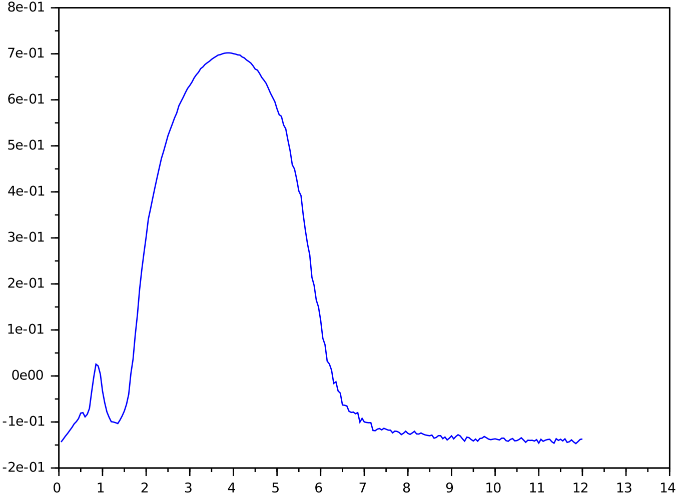
Le comportement en temps long du cas périodique admet une alternance entre des états stables et des états explosifs selon le temps que l'on reste dans chacun des états.



Petite modification

On passe de $E = \{0, 1\}$ à $E = \{0, 1, ..., n, n+1, ..., 2n\}$ avec des temps de sauts exponentiels de manière à ce que le taux de saut pour passer du flot i au flot $1-i$ suivent des lois gamma de paramètres $(n, n\beta u)$ (respectivement $(n, n\beta(1-u))$).

Simulation de χ dans ce cas



MERCI DE VOTRE ATTENTION