

# Métastabilité du Processus de Blume-Capel

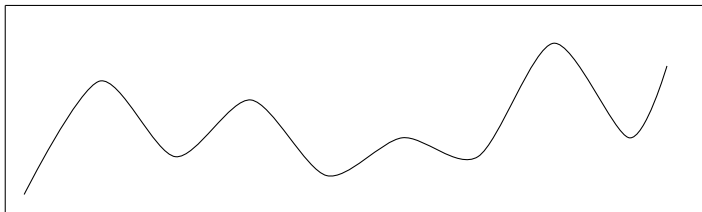
Paul Lemire (LMRS, Rouen)

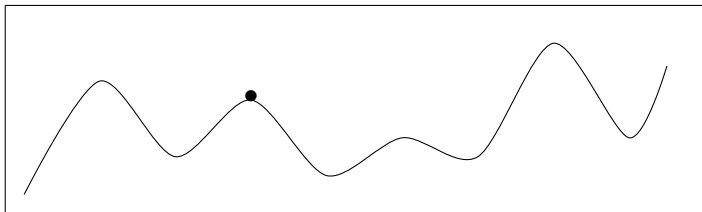
Travail en collaboration avec Claudio Landim (LMRS, IMPA)

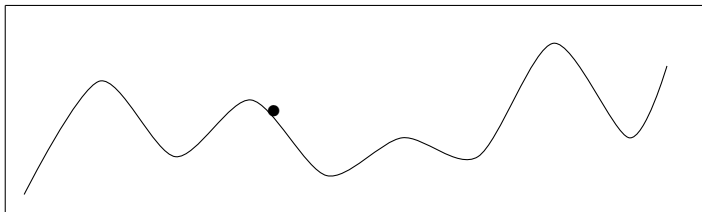
Colloque JPS 2016, Les Houches - 18-22 Avril

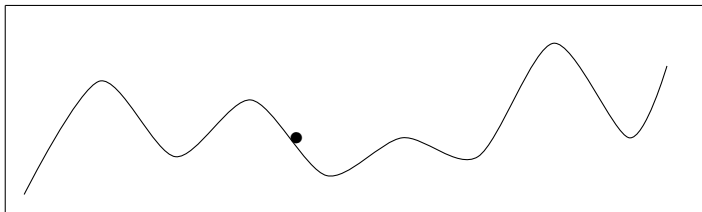
# Plan

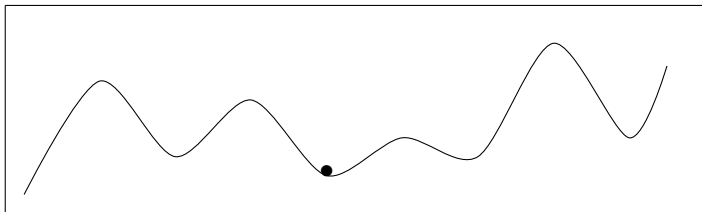
- 1 Métastabilité des processus markoviens de sauts
- 2 Le modèle de Blume-Capel
- 3 Temps de transition











# Intuitions

- Le processus est attiré par les puits.



# Intuitions

- Le processus est attiré par les puits.
- Plus un puits est profond, plus il est attractif.

# Intuitions

- Le processus est attiré par les puits.
- Plus un puits est profond, plus il est attractif.
- Selon l'échelle de temps, le processus néglige des puits.

# LE théorème !

Soit  $(\eta_t^\beta)_{\beta \geq 0}$  une famille de processus de Markov,  $\beta \uparrow \infty$ , sur un espace d'états fini  $E$ .

**Théorème (Beltrán, Landim, 2011).**

Il existe  $\mathfrak{M} \geq 1$ , des échelles de temps  $\{\theta_\beta(k) : \beta \geq 1\}$ ,  $1 \leq k \leq \mathfrak{M}$ ,  $1 \prec \theta_\beta(1) \prec \dots \prec \theta_\beta(\mathfrak{M})$ , et, pour tout  $1 \leq k \leq \mathfrak{M}$ , une partition avec  $\nu(k)$  puits  $\mathcal{E}_1^{(k)}, \dots, \mathcal{E}_{\nu(k)}^{(k)}$ ,  $\Delta_k$  de l'espace  $E$  tels que pour tout  $1 \leq k \leq \mathfrak{M}$  :

- 1 Le processus  $\eta_{t\theta_\beta(k)}^\beta$  a un comportement métastable, avec  $\mathcal{E}_1^{(k)}, \dots, \mathcal{E}_{\nu(k)}^{(k)}$  comme états métastables : on parle d'états  $k$ -métastables.
- 2 Les états  $k$ -métastables sont des réunions d'états  $(k-1)$ -métastables.



## Définition du modèle

On considère un tore 2-dimensionnel  $\Lambda_L = \mathbb{T}_L \times \mathbb{T}_L$ ,  $L \geq 1$ , où  $\mathbb{T}_L = \{1, \dots, L\}$  (condition périodique  $L + 1 = 1$ ).  
L'espace d'états est donné par  $\Omega_L = \{-1, 0, 1\}^{\Lambda_L}$ .

## Définition du modèle

On considère un tore 2-dimensionnel  $\Lambda_L = \mathbb{T}_L \times \mathbb{T}_L$ ,  $L \geq 1$ , où

$\mathbb{T}_L = \{1, \dots, L\}$  (condition périodique  $L + 1 = 1$ ).

L'espace d'états est donné par  $\Omega_L = \{-1, 0, 1\}^{\Lambda_L}$ .

L'Hamiltonien est donné par

$$\mathbb{H}(\sigma) = \sum_{\substack{x,y \\ |x-y|=1}} [\sigma(y) - \sigma(x)]^2 - h \sum_x \sigma(x),$$

où  $\sigma(x) \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $0 < h < 1$ , et la première somme est faite sur les paires de voisins. Il représente l'énergie de la configuration  $\sigma$ .

## Définition du modèle

On considère un tore 2-dimensionnel  $\Lambda_L = \mathbb{T}_L \times \mathbb{T}_L$ ,  $L \geq 1$ , où  $\mathbb{T}_L = \{1, \dots, L\}$  (condition périodique  $L + 1 = 1$ ).  
L'espace d'états est donné par  $\Omega_L = \{-1, 0, 1\}^{\Lambda_L}$ .  
L'Hamiltonien est donné par

$$\mathbb{H}(\sigma) = \sum_{\substack{x,y \\ |x-y|=1}} [\sigma(y) - \sigma(x)]^2 - h \sum_x \sigma(x),$$

où  $\sigma(x) \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $0 < h < 1$ , et la première somme est faite sur les paires de voisins. Il représente l'énergie de la configuration  $\sigma$ .  
Avec  $\beta > 0$  l'inverse de la température, la mesure associée à  $\mathbb{H}$  est donnée par

$$\mu_\beta(\sigma) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta \mathbb{H}(\sigma)}.$$

## Définition du modèle

On considère le cas d'une dynamique de Glauber pour laquelle  $\mu_\beta$  est mesure invariante : le processus partant de  $\sigma$  ne peut sauter que vers une configuration  $\sigma^{x,\pm}$ ,  $x \in \Lambda_L$ , où  $\sigma^{x,\pm}$  est la configuration  $\sigma$  à laquelle on change le signe au site  $x$ .

## Définition du modèle

On considère le cas d'une dynamique de Glauber pour laquelle  $\mu_\beta$  est mesure invariante : le processus partant de  $\sigma$  ne peut sauter que vers une configuration  $\sigma^{x,\pm}$ ,  $x \in \Lambda_L$ , où  $\sigma^{x,\pm}$  est la configuration  $\sigma$  à laquelle on change le signe au site  $x$ . Les taux de saut sont donnés par

$$R_\beta(\sigma, \sigma^{x,\pm}) = e^{-\beta[\mathbb{H}(\sigma^{x,\pm}) - \mathbb{H}(\sigma)]_+},$$

où  $[\cdot]_+$  désigne la partie positive.



## Définition du modèle

On considère le cas d'une dynamique de Glauber pour laquelle  $\mu_\beta$  est mesure invariante : le processus partant de  $\sigma$  ne peut sauter que vers une configuration  $\sigma^{x,\pm}$ ,  $x \in \Lambda_L$ , où  $\sigma^{x,\pm}$  est la configuration  $\sigma$  à laquelle on change le signe au site  $x$ . Les taux de saut sont donnés par

$$R_\beta(\sigma, \sigma^{x,\pm}) = e^{-\beta[\mathbb{H}(\sigma^{x,\pm}) - \mathbb{H}(\sigma)]_+},$$

où  $[\cdot]_+$  désigne la partie positive.

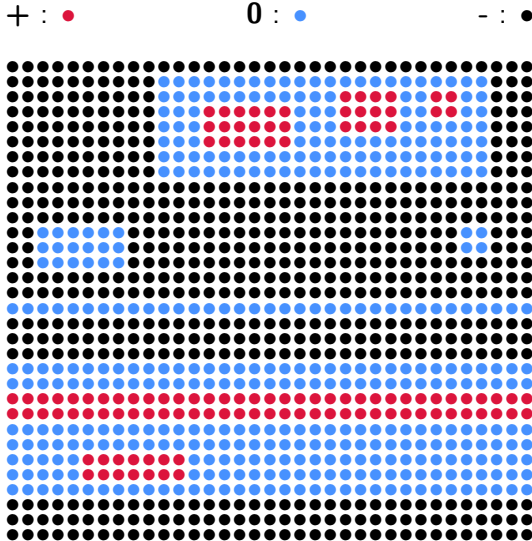
Dans ce modèle, les états 1-métastables (ou *stables*) sont des singletons  $\{\sigma\}$ , avec  $\sigma$  tel que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{x \in \Lambda_L} [R_\beta(\sigma, \sigma^{x,+}) + R_\beta(\sigma, \sigma^{x,-})] = 0.$$

# États stables

Un état est stable si :

- Un  $+$  est entouré au maximum de deux  $0$ , au minimum de deux  $+$ , et n'est entouré d'aucun  $-$ .
- Si un  $0$  est entouré au minimum de deux  $0$  et au maximum de deux  $-$ . Il peut être entouré au maximum d'un  $+$ , auquel cas il ne peut alors être entouré que d'un  $-$ .
- Un  $-$  est entouré au minimum de trois  $-$  et au maximum d'un  $0$ .



# Métastabilité du modèle

- Sur chaque échelle de temps, les états métastables sont de cette forme.

# Métastabilité du modèle

- Sur chaque échelle de temps, les états métastables sont de cette forme.
- Ils sont définis en fonction d'une taille minimale autorisée pour les rectangles de  $+$  et de  $0$  : lors d'un passage d'une échelle  $\theta_\beta(k)$  à  $\theta_\beta(k+1)$ , certains *petits* rectangles disparaissent.

# Métastabilité du modèle

- Sur chaque échelle de temps, les états métastables sont de cette forme.
- Ils sont définis en fonction d'une taille minimale autorisée pour les rectangles de  $+$  et de  $0$  : lors d'un passage d'une échelle  $\theta_\beta(k)$  à  $\theta_\beta(k+1)$ , certains *petits* rectangles disparaissent.
- Il existe une *taille critique*  $n_0$ . Les rectangles de largeur  $n_0$  ou plus ne peuvent pas disparaître : ils grossissent jusqu'à remplir le tore de  $0$  ou de  $+$ .

# Métastabilité du modèle

- Sur chaque échelle de temps, les états métastables sont de cette forme.
- Ils sont définis en fonction d'une taille minimale autorisée pour les rectangles de  $+$  et de  $0$  : lors d'un passage d'une échelle  $\theta_\beta(k)$  à  $\theta_\beta(k+1)$ , certains *petits* rectangles disparaissent.
- Il existe une *taille critique*  $n_0$ . Les rectangles de largeur  $n_0$  ou plus ne peuvent pas disparaître : ils grossissent jusqu'à remplir le tore de  $0$  ou de  $+$ .
- **Sur la dernière échelle de temps, il reste trois états métastables :  $-1$ ,  $0$ ,  $+1$ .**

# Sur le passage de $-1$ à $+1$

**Question** : Comment le processus passe-t-il de la configuration  $-1$  à la configuration  $+1$  ?



# Sur le passage de $-1$ à $+1$

**Question** : Comment le processus passe-t-il de la configuration  $-1$  à la configuration  $+1$  ?

Proposition (Landim, L., 2016)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{-1}[H_{+1} < H_0] = 0,$$

où  $H_A = \inf\{t > 0 : \eta_t \in A\}$  est le *temps d'atteinte de A*.

# Sur le passage de $-1$ à $+1$

**Question** : Comment le processus passe-t-il de la configuration  $-1$  à la configuration  $+1$  ?

Proposition (Landim, L., 2016)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{-1}[H_{+1} < H_0] = 0,$$

où  $H_A = \inf\{t > 0 : \eta_t \in A\}$  est le *temps d'atteinte de A*.

*Idée de Preuve* :  $n_0 = 3$ ,  $+$  : ●,  $0$  : ●,  $-$  : ●

# Sur le passage de $-1$ à $+1$

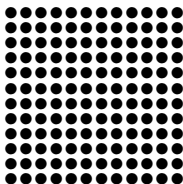
**Question :** Comment le processus passe-t-il de la configuration  $-1$  à la configuration  $+1$  ?

Proposition (Landim, L., 2016)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{-1}[H_{+1} < H_0] = 0,$$

où  $H_A = \inf\{t > 0 : \eta_t \in A\}$  est le *temps d'atteinte de A*.

*Idée de Preuve :*  $n_0 = 3$ ,  $+$  : ●,  $0$  : ●,  $-$  : ●



# Sur le passage de $-1$ à $+1$

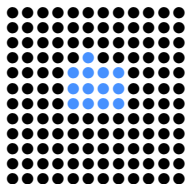
**Question :** Comment le processus passe-t-il de la configuration  $-1$  à la configuration  $+1$  ?

Proposition (Landim, L., 2016)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{-1}[H_{+1} < H_0] = 0,$$

où  $H_A = \inf\{t > 0 : \eta_t \in A\}$  est le *temps d'atteinte de A*.

*Idée de Preuve :*  $n_0 = 3$ ,  $+$  : ●,  $0$  : ●,  $-$  : ●



# Sur le passage de $-1$ à $+1$

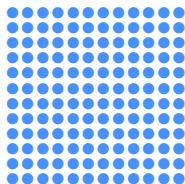
**Question** : Comment le processus passe-t-il de la configuration  $-1$  à la configuration  $+1$  ?

Proposition (Landim, L., 2016)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{-1}[H_{+1} < H_0] = 0,$$

où  $H_A = \inf\{t > 0 : \eta_t \in A\}$  est le *temps d'atteinte de A*.

*Idée de Preuve* :  $n_0 = 3$ ,  $+$  : ●,  $0$  : ●,  $-$  : ●



# Sur le passage de $-1$ à $+1$

**Question 2 :** Comment estimer finement le temps moyen de ce passage  $\mathbb{E}_{-1}[H_{+1}]$  ?

# Sur le passage de -1 à +1

**Question 2 :** Comment estimer finement le temps moyen de ce passage  $\mathbb{E}_{-1}[H_{+1}]$  ?

Proposition (Cirillo, Nardi, 2012)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \mathbb{E}_{-1}[H_{+1}] = \Gamma_c,$$

où  $\Gamma_c = 4(n_0 + 1) - h[(n_0 + 1)n_0 + 1]$ .

On aimerait obtenir des constantes  $C_0$  et  $C_1$  telles que

$$C_0 e^{\beta \Gamma_c} \leq \mathbb{E}_{-1}[H_{+1}] \leq C_1 e^{\beta \Gamma_c}.$$

# Sur le passage de -1 à +1

Proposition (Landim, L., 2016)

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\beta \Gamma_c}} \mathbb{E}_{-1}[H_{+1}] = 2, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\beta \Gamma_c}} \mathbb{E}_{\mathbf{0}}[H_{+1}] = 1.$$

*Idée de preuve :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{0}}[H_{+1}] &= (1 + o(1)) \frac{1}{\text{cap}(\mathbf{0}, +\mathbf{1})} \{ \mu_{\beta}(\mathbf{0}) + \mu_{\beta}(-\mathbf{1}) \mathbb{P}_{-1}[H_{\mathbf{0}} < H_{+1}] \} \\ &= (1 + o(1)) \frac{\mu_{\beta}(\mathbf{0})}{\text{cap}(\mathbf{0}, +\mathbf{1})} \\ &= (1 + o(1)) e^{\beta \Gamma_c}. \end{aligned}$$



Merci de votre attention.