LA VITESSE DE RELAXATION DANS UN FLOT INCOMPRESSIBLE

Thi Hien NGUYEN
en colaboration avec Brice FRANKE

Université de Brest

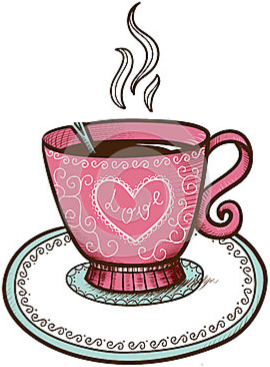
Les Houches, le 20 avril 2016

Plan

Équation de la chaleur dans un médium sans dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t)$$

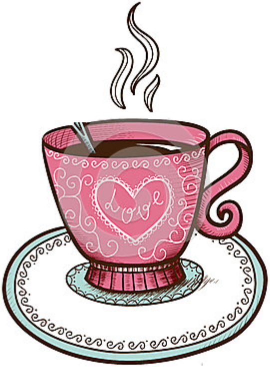
- $\phi(x,t)$ est utilisé pour représenter la température à l'instant t au point x
- Condition initial $\phi(x,0) = \phi_0(x), \phi_0 \in C^1$
- Condition sur le bord



Équation de la chaleur dans un médium sans dérive

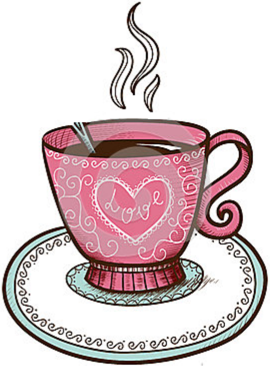
$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t)$$

- $\phi(x,t)$ est utilisé pour représenter la température à l'instant t au point x
- Condition initial $\phi(x,0) = \phi_0(x), \phi_0 \in C^1$
- Condition sur le bord



Équation de la chaleur dans un médium sans dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t)$$

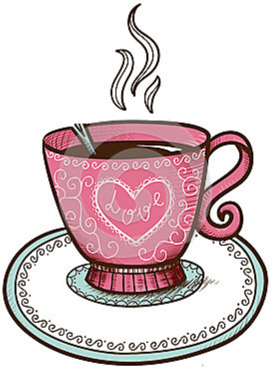


- $\phi(x,t)$ est utilisé pour représenter la température à l'instant t au point x
- Condition initial $\phi(x,0) = \phi_0(x), \phi_0 \in C^1$
- Condition sur le bord

Équation de la chaleur dans un médium sans dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t)$$

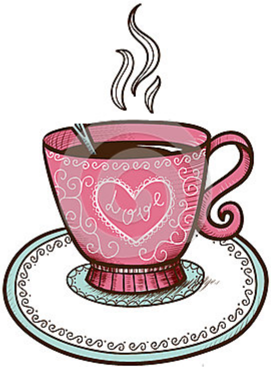
- $\phi(x,t)$ est utilisé pour représenter la température à l'instant t au point x
- Condition initial $\phi(x,0) = \phi_0(x), \phi_0 \in C^1$
- Condition sur le bord



Équation de la chaleur dans un médium sans dérive

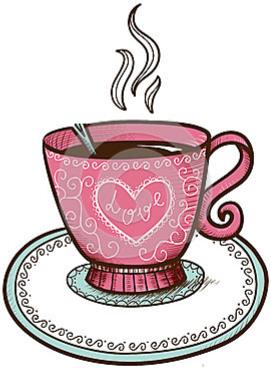
$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t)$$

- $\phi(x,t)$ est utilisé pour représenter la température à l'instant t au point x
- Condition initial $\phi(x,0) = \phi_0(x), \phi_0 \in C^1$
- Condition sur le bord



Équation de la chaleur dans un médium sans dérive

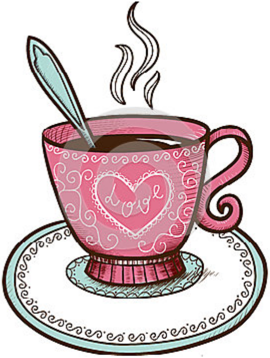
$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t)$$



- $\phi(x,t)$ est utilisé pour représenter la température à l'instant t au point x
- Condition initial $\phi(x,0) = \phi_0(x), \phi_0 \in C^1$
- Condition sur le bord

Équation de la chaleur dans un médium avec dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta\phi(x,t) + u \cdot \nabla\phi(x,t)$$



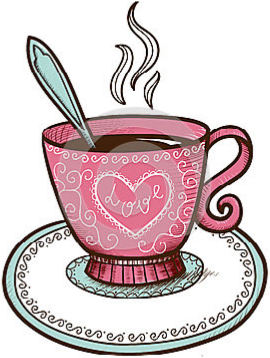
- u est un champ de vecteurs qui donne la vitesse du liquide
- Φ flot associé à l'équation $\dot{x} = u(x)$
- $\mathrm{Div} u = 0$, le flot incompressible

$\Phi_t(x)$ la position d'un atome du liquide après temps t qui part de position de x,$(\Phi_0(x) = x)$.

Équation de la chaleur dans un médium avec dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta\phi(x,t) + u\cdot\nabla\phi(x,t)$$

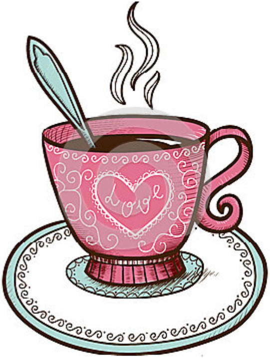
- u est un champ de vecteurs qui donne la vitesse du liquide
- Φ flot associé à l'équation $\dot{x} = u(x)$
- $\mathrm{Div}u = 0$, le flot incompressible



$\Phi_t(x)$ la position d'un atome du liquide après temps t qui part de position de x,$(\Phi_0(x) = x)$.

Équation de la chaleur dans un médium avec dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta\phi(x,t) + u \cdot \nabla\phi(x,t)$$

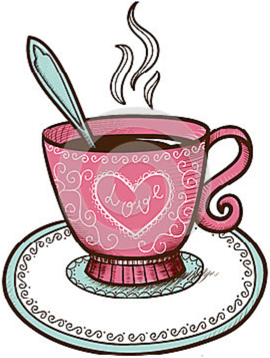


- u est un champ de vecteurs qui donne la vitesse du liquide
- Φ flot associé à l'équation $\dot{x} = u(x)$
- $\mathrm{Div} u = 0$, le flot incompressible

$\Phi_t(x)$ la position d'un atome du liquide après temps t qui part de position de x,$(\Phi_0(x) = x)$.

Équation de la chaleur dans un médium avec dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t) + u \cdot \nabla \phi(x,t)$$

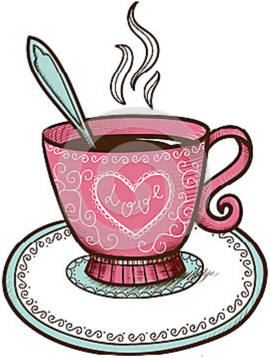


- u est un champ de vecteurs qui donne la vitesse du liquide
- Φ flot associé à l'équation $\dot{x} = u(x)$
- $\mathrm{Div} u = 0$, le flot incompressible

$\Phi_t(x)$ la position d'un atome du liquide après temps t qui part de position de x,($\Phi_0(x) = x$).

Équation de la chaleur dans un médium avec dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t) + u \cdot \nabla \phi(x,t)$$

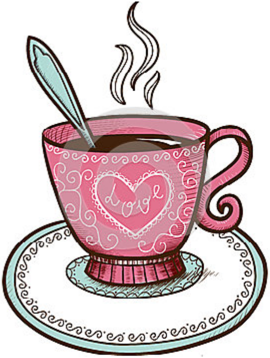


- u est un champ de vecteurs qui donne la vitesse du liquide
- Φ flot associé à l'équation $\dot{x} = u(x)$
- $\text{Div} u = 0$, le flot incompressible

$\Phi_t(x)$ la position d'un atome du liquide après temps t qui part de position de x,$(\Phi_0(x) = x)$.

Équation de la chaleur dans un médium avec dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t) + u \cdot \nabla \phi(x,t)$$

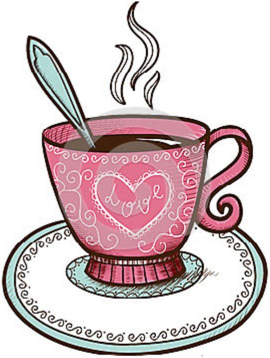


- u est un champ de vecteurs
  qui donne la vitesse du liquide
- Φ flot associé à l'équation $\dot{x} = u(x)$
- $\mathrm{Div} u = 0$, le flot incompressible

$\Phi_t(x)$ la position d'un atome du liquide après temps t qui part de position de x,$(\Phi_0(x) = x)$.

Équation de la chaleur dans un médium avec dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta\phi(x,t) + u \cdot \nabla\phi(x,t)$$

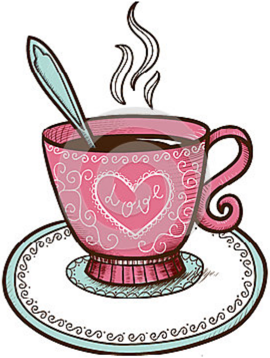


- u est un champ de vecteurs qui donne la vitesse du liquide
- Φ flot associé à l'équation $\dot{x} = u(x)$
- $\mathrm{Div} u = 0$, le flot incompressible

$\Phi_t(x)$ la position d'un atome du liquide après temps t qui part de position de x,$(\Phi_0(x) = x)$.

Accélerer la dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t) + Au \cdot \nabla \phi(x,t)$$



- $\dot{x} = Au(x)$, $A \in \mathbb{R}$
- $\Phi_t^A(x)$ le flot accéléré

$$\Phi_t^A(x) = \Phi_{At}(x)$$

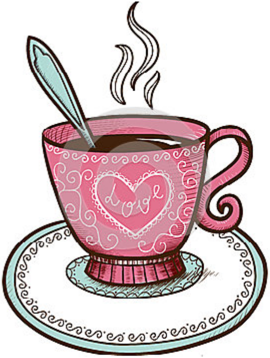
Comment réagit la diffusion de la chaleur quand on accélère la dérive ?

Accélerer la dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t) + Au \cdot \nabla \phi(x,t)$$

- $\dot{x} = Au(x)$, $A \in \mathbb{R}$
- $\Phi_t^A(x)$ le flot accéléré

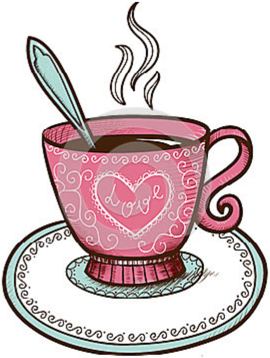
$$\Phi_t^A(x) = \Phi_{At}(x)$$



Comment réagit la diffusion de la chaleur quand on accélère la dérive ?

Accélerer la dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t) + Au \cdot \nabla \phi(x,t)$$



- $\dot{x} = Au(x)$, $A \in \mathbb{R}$
- $\Phi_t^A(x)$ le flot accéléré

$$\Phi_t^A(x) = \Phi_{At}(x)$$

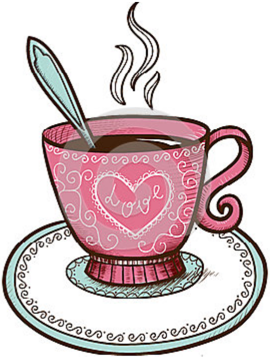
Comment réagit la diffusion de la chaleur quand on accélère la dérive ?

Accélerer la dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta\phi(x,t) + Au \cdot \nabla\phi(x,t)$$

- $\dot{x} = Au(x)$, $A \in \mathbb{R}$
- $\Phi_t^A(x)$ le flot accéléré

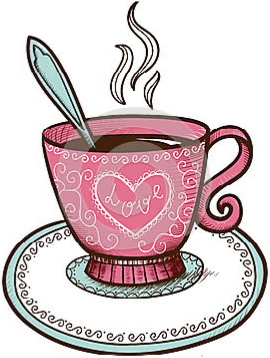
$$\Phi_t^A(x) = \Phi_{At}(x)$$



Comment réagit la diffusion de la chaleur quand on accélère la dérive ?

Accélerer la dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t) + Au \cdot \nabla \phi(x,t)$$



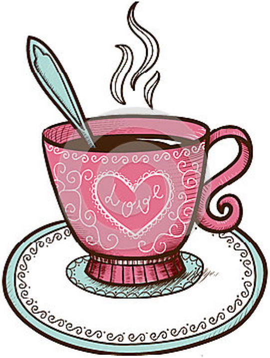
- $\dot{x} = Au(x)$, $A \in \mathbb{R}$
- $\Phi_t^A(x)$ le flot accéléré

$$\Phi_t^A(x) = \Phi_{At}(x)$$

Comment réagit la diffusion de la chaleur quand on accélère la dérive ?

Accélerer la dérive

$$\partial_t \phi(x,t) = \Delta \phi(x,t) + Au \cdot \nabla \phi(x,t)$$



- $\dot{x} = Au(x)$, $A \in \mathbb{R}$
- $\Phi_t^A(x)$ le flot accéléré

$$\Phi_t^A(x) = \Phi_{At}(x)$$

Comment réagit la diffusion de la chaleur quand on accélère la dérive ?

Soit $(\mathbb{M}, g)$ une variété riemannienne compacte sans bord de dimension d

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi^A(x,t) = Au \cdot \nabla \phi^A(x,t) + \Delta \phi^A(x,t), \\ \phi^A(x,0) = \phi_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

où

- Δ : l'opérateur de Laplace-Beltrami
- ∇ : dérivée covariante (gradient)
- u : champ vectoriel divergence zéro
- $A \in \mathbb{R}$
- $\int_{\mathbb{M}} \phi_0 dx = 0 \Longrightarrow \int_{\mathbb{M}} \phi^A(x,t)dx = 0$ pour tout t

Soit $(\mathbb{M}, g)$ une variété riemannienne compacte sans bord de dimension d

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi^A(x,t) = Au \cdot \nabla \phi^A(x,t) + \Delta \phi^A(x,t), \\ \phi^A(x,0) = \phi_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

où

Δ : l'opérateur de Laplace-Beltrami

∇ : dérivée covariante (gradient)

u : champ vectoriel divergence zéro

$A \in \mathbb{R}$

$\int_{\mathbb{M}} \phi_0 dx = 0 \Longrightarrow \int_{\mathbb{M}} \phi^A(x,t) dx = 0$ pour tout t

L'inégalité suivante est bien connue

$$\left\|\phi^A(t)\right\| \leq K_A e^{-\rho_A t} \left\|\phi_0\right\|,$$

où

$\|.\|$: la norme L^2 sur $(\mathbb{M}, \mathrm{vol}_{\mathbb{M}})$

ρ_A : le trou spectral de l'opérateur $L_A = \Delta + Au \cdot \nabla$

$$\rho_A = \inf\{-\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in \mathrm{Spec} L_A \backslash \{0\}\}$$

K_A : une constante positive non explicite.

Si A est fixé alors $\left\|\phi^A(t)\right\| \to 0$ quand $t \to \infty$.

L'inégalité suivante est bien connue

$$\left\|\phi^A(t)\right\| \leq K_A e^{-\rho_A t} \left\|\phi_0\right\|,$$

où

$\|.\|$: la norme L^2 sur $(\mathbb{M}, \mathrm{vol}_{\mathbb{M}})$

ρ_A : le trou spectral de l'opérateur $L_A = \Delta + Au \cdot \nabla$

$$\rho_A = \inf\{-\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in \mathrm{Spec} L_A \setminus \{0\}\}$$

K_A : une constante positive non explicite.

Si A est fixé alors $\left\|\phi^A(t)\right\| \to 0$ quand $t \to \infty$.

L'inégalité suivante est bien connue

$$\left\|\phi^A(t)\right\| \leq K_A e^{-\rho_A t} \left\|\phi_0\right\|,$$

où

$\|.\|$: la norme L^2 sur $(\mathbb{M}, \mathrm{vol}_{\mathbb{M}})$
ρ_A : le trou spectral de l'opérateur $L_A = \Delta + Au \cdot \nabla$

$$\rho_A = \inf\{-\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in \mathrm{Spec} L_A \backslash \{0\}\}$$

K_A : une constante positive non explicite.

Si A est fixé alors $\left\|\phi^A(t)\right\| \to 0$ quand $t \to \infty$.

L'inégalité suivante est bien connue

$$\left\|\phi^A(t)\right\| \leq K_A e^{-\rho_A t} \left\|\phi_0\right\|,$$

où

$\|.\|$: la norme L^2 sur $(\mathbb{M}, \mathrm{vol}_{\mathbb{M}})$

ρ_A : le trou spectral de l'opérateur $L_A = \Delta + Au \cdot \nabla$

$$\rho_A = \inf\{-\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in \mathrm{Spec}L_A \backslash \{0\}\}$$

K_A : une constante positive non explicite.

Si A est fixé alors $\left\|\phi^A(t)\right\| \to 0$ quand $t \to \infty$.

L'inégalité suivante est bien connue

$$\left\|\phi^A(t)\right\| \leq K_A e^{-\rho_A t}\left\|\phi_0\right\|,$$

où

$\|.\|$: la norme L^2 sur $(\mathbb{M}, \mathrm{vol}_{\mathbb{M}})$

ρ_A : le trou spectral de l'opérateur $L_A = \Delta + Au \cdot \nabla$

$$\rho_A = \inf\{-\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in \mathrm{Spec} L_A \backslash \{0\}\}$$

K_A : une constante positive non explicite.

Si A est fixé alors $\left\|\phi^A(t)\right\| \to 0$ quand $t \to \infty$.

L'inégalité suivante est bien connue

$$\left\|\phi^A(t)\right\| \leq K_A e^{-\rho_A t} \left\|\phi_0\right\|,$$

où

$\|.\|$: la norme L^2 sur $(\mathbb{M}, \mathrm{vol}_{\mathbb{M}})$

ρ_A : le trou spectral de l'opérateur $L_A = \Delta + Au \cdot \nabla$,

$$\rho_A = \inf\{-\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in \mathrm{Spec} L_A \backslash \{0\}\}$$

K_A : une constante positive non explicite.

Si A est fixé alors $\left\|\phi^A(t)\right\| \to 0$ quand $t \to \infty$.

Ce qui se passe si t est fixé et $A \to \infty$?

L'inégalité suivante est bien connue

$$\left\|\phi^A(t)\right\| \leq K_A e^{-\rho_A t} \left\|\phi_0\right\|,$$

où

$\|.\|$: la norme L^2 sur $(\mathbb{M}, \mathrm{vol}_{\mathbb{M}})$

ρ_A : le trou spectral de l'opérateur $L_A = \Delta + Au \cdot \nabla$,

$$\rho_A = \inf\{-\mathrm{Re}\lambda, \lambda \in \mathrm{Spec}L_A \backslash \{0\}\}$$

K_A : une constante positive non explicite.

Si A est fixé alors $\left\|\phi^A(t)\right\| \to 0$ quand $t \to \infty$.

Ce qui se passe si t est fixé et $A \to \infty$?

Soit $H^1 := \left\{\varphi \in L^2, \int \phi dx = 0, \int |\nabla\varphi|^2 dx < \infty\right\}.$

Théorème (Franke, Hwang, Pai et Sheu 2010)

$$\lim_{|A|\to\infty} \rho_A = \inf_{\mu} \inf \left\{ \frac{1}{2} \int |\nabla\phi|^2 \, dx, \|\phi\| = 1, \phi \in H^1_\mu \right\}$$

avec $H^1_\mu := \left\{\phi \in H^1, u.\nabla\phi =^w i\mu\phi\right\}.$

Lorsque $H^1_\mu = \emptyset$ pour tout μ on a $\rho_A \uparrow \infty$ pour $|A| \uparrow \infty$.

Ceci est par exemple le cas si le flot généré par u est faiblement mélangeant.

Soit $H^1 := \left\{\varphi \in L^2, \int \phi dx = 0, \int |\nabla\varphi|^2 dx < \infty\right\}$.

Théorème (Franke, Hwang, Pai et Sheu 2010)

$$\lim_{|A|\to\infty} \rho_A = \inf_{\mu} \inf \left\{ \frac{1}{2} \int |\nabla \phi|^2 \, dx, \|\phi\| = 1, \phi \in H^1_\mu \right\}$$

avec $H^1_\mu := \left\{\phi \in H^1, u.\nabla\phi =^w i\mu\phi\right\}$.

Lorsque $H^1_\mu = \emptyset$ pour tout μ on a $\rho_A \uparrow \infty$ pour $|A| \uparrow \infty$.

Ceci est par exemple le cas si le flot généré par u est faiblement mélangeant.

Soit $H^1 := \left\{\varphi \in L^2, \int \phi dx = 0, \int |\nabla\varphi|^2 dx < \infty\right\}$.

Théorème (Franke, Hwang, Pai et Sheu 2010)

$$\lim_{|A|\to\infty} \rho_A = \inf_{\mu} \inf \left\{ \frac{1}{2} \int |\nabla\phi|^2 \, dx, \|\phi\| = 1, \phi \in H^1_\mu \right\}$$

avec $H^1_\mu := \left\{\phi \in H^1, u.\nabla\phi =^w i\mu\phi\right\}$.

Lorsque $H^1_\mu = \emptyset$ pour tout μ on a $\rho_A \uparrow \infty$ pour $|A| \uparrow \infty$.

Ceci est par exemple le cas si le flot généré par u est faiblement mélangeant.

Soit $H^1 := \left\{\varphi \in L^2, \int \phi dx = 0, \int |\nabla\varphi|^2 dx < \infty\right\}$.

Théorème (Franke, Hwang, Pai et Sheu 2010)

$$\lim_{|A|\to\infty} \rho_A = \inf_{\mu} \inf \left\{ \frac{1}{2} \int |\nabla\phi|^2 \, dx, \|\phi\| = 1, \phi \in H^1_\mu \right\}$$

avec $H^1_\mu := \left\{\phi \in H^1, u.\nabla\phi =^w i\mu\phi\right\}$.

Lorsque $H^1_\mu = \emptyset$ pour tout μ on a $\rho_A \uparrow \infty$ pour $|A| \uparrow \infty$.

Ceci est par exemple le cas si le flot généré par u est faiblement mélangeant.

Théorème (Constantin, Kiselev, Ryzhik, et Zlatos 2008)

Si l'opérateur $u \cdot \nabla$ n'a pas de fonction propre dans H^1, alors pour tous $\tau, \delta > 0$ fixés, il existe $A(\tau, \delta)$ telle que

$$\left\|\phi^A(., \tau)\right\| < \delta$$

pour tout $A > A(\tau, \delta)$.

On appelle ce phénomène la relaxation.

Lorsque $H^1_\mu = \emptyset$ pour tout μ on a $\rho_A \uparrow \infty$ pour $|A| \uparrow \infty$.

Théorème (Constantin, Kiselev, Ryzhik, et Zlatos 2008)

Si l'opérateur $u \cdot \nabla$ *n'a pas de fonction propre dans* H^1*, alors pour tous* $\tau, \delta > 0$ *fixés, il existe* $A(\tau, \delta)$ *telle que*

$$\|\phi^A(., \tau)\| < \delta$$

pour tout $A > A(\tau, \delta)$*.*

On appelle ce phénomène la relaxation.

Lorsque $H^1_\mu = \emptyset$ pour tout μ on a $\rho_A \uparrow \infty$ pour $|A| \uparrow \infty$.

À quelle vitesse $\|\phi^A(., \tau)\|$ tend vers 0 ?

Théorème (Constantin, Kiselev, Ryzhik, et Zlatos 2008)

Si l'opérateur $u \cdot \nabla$ n'a pas de fonction propre dans H^1, alors pour tous $\tau, \delta > 0$ fixés, il existe $A(\tau, \delta)$ telle que

$$\left\|\phi^A(., \tau)\right\| < \delta$$

pour tout $A > A(\tau, \delta)$.

On appelle ce phénomène la relaxation.

Lorsque $H^1_\mu = \emptyset$ pour tout μ on a $\rho_A \uparrow \infty$ pour $|A| \uparrow \infty$.

À quelle vitesse $\left\|\phi^A(., \tau)\right\|$ tend vers 0 ?

Supposition (Décroissance de la corrélation)

Supposons il existe trois constantes positives $C_1, C_2, \kappa > 0$ *telles que pour tout* $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\kappa(\mathbb{M})$ *et* $t > 0$, *nous avons*

$$|\langle f_1, f_2 \circ \Phi_t \rangle - \langle f_1, 1 \rangle \langle 1, f_2 \rangle| \le C_1 e^{-C_2 t} \|f_1\|_{\mathcal{C}^\kappa} \|f_2\|_{\mathcal{C}^\kappa} .$$

Supposition (Décroissance de la corrélation)

Supposons il existe trois constantes positives $C_1, C_2, \kappa > 0$ *telles que pour tout* $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\kappa(\mathbb{M})$ *et* $t > 0$, *nous avons*

$$|\langle f_1, f_2 \circ \Phi_t \rangle - \langle f_1, 1 \rangle \langle 1, f_2 \rangle| \leq C_1 e^{-C_2 t} \|f_1\|_{\mathcal{C}^\kappa} \|f_2\|_{\mathcal{C}^\kappa} .$$

Supposition (Décroissance de la corrélation)

Supposons il existe trois constantes positives $C_1, C_2, \kappa > 0$ *telles que pour tout* $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\kappa(\mathbb{M})$ *et* $t > 0$, *nous avons*

$$|\langle f_1, f_2 \circ \Phi_t \rangle - \langle f_1, 1 \rangle \langle 1, f_2 \rangle| \leq C_1 e^{-C_2 t} \|f_1\|_{\mathcal{C}^\kappa} \|f_2\|_{\mathcal{C}^\kappa} .$$

Théorème (Franke - Nguyen [4])

Si $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *satisfait le décroissance de la corrélation, alors pour tout* $t > 0$ *il existe trois constantes* $A_t, \Theta_t, \Xi > 0$ *telles que*

$$\left\| \phi^A(t) \right\| < \exp\left[-\Theta_t (\ln(\Xi A))^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}} \right] \quad \textit{pour tout } A > A_t.$$

Soit $\phi^A(t) = \phi^\epsilon(t/\epsilon)$, nous travaillons avec l'équation équivalente

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\phi^\epsilon(s) = (u\cdot\nabla + \epsilon\Delta)\phi^\epsilon(s), \\ \phi^\epsilon(0) = \phi_0. \end{cases} \tag{2}$$

Constantin et al. ont montré que pour tout τ et δ, il existe un $\epsilon_0(\delta)$ tel que $\forall\epsilon < \epsilon_0(\delta)$, on a $\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta$.

Nous allons chercher une fonction explicite $\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta)$ avec $\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta) < \epsilon_0(\delta)$. Ça nous donne

$$\left\|\phi^{\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta)}(\tau/\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta))\right\| \le \delta, \text{ pour tout } \delta.$$

La fonction $\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta)$ a une fonction inverse explicite $\delta^{\mathrm{expl}}(\epsilon)$. Donc

$$\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta^{\mathrm{expl}}(\epsilon), \text{ pour tout } \epsilon \text{ suffisamment petit.}$$

Soit $\phi^A(t) = \phi^\epsilon(t/\epsilon)$, nous travaillons avec l'équation équivalente

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\phi^\epsilon(s) = (u \cdot \nabla + \epsilon\Delta)\phi^\epsilon(s), \\ \phi^\epsilon(0) = \phi_0. \end{cases} \tag{2}$$

Constantin et al. ont montré que pour tout τ et δ, il existe un $\epsilon_0(\delta)$ tel que $\forall \epsilon < \epsilon_0(\delta)$, on a $\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta$.

Nous allons chercher une fonction explicite $\epsilon^{\text{expl}}(\delta)$ avec $\epsilon^{\text{expl}}(\delta) < \epsilon_0(\delta)$. Ça nous donne

$$\left\| \phi^{\epsilon^{\text{expl}}(\delta)}(\tau/\epsilon^{\text{expl}}(\delta)) \right\| \leq \delta, \text{ pour tout } \delta.$$

La fonction $\epsilon^{\text{expl}}(\delta)$ a une fonction inverse explicite $\delta^{\text{expl}}(\epsilon)$. Donc

$$\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta^{\text{expl}}(\epsilon), \text{ pour tout } \epsilon \text{ suffisamment petit.}$$

Soit $\phi^A(t) = \phi^\epsilon(t/\epsilon)$, nous travaillons avec l'équation équivalente

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\phi^\epsilon(s) = (u \cdot \nabla + \epsilon\Delta)\phi^\epsilon(s), \\ \phi^\epsilon(0) = \phi_0. \end{cases} \tag{2}$$

Constantin et al. ont montré que pour tout τ et δ, il existe un $\epsilon_0(\delta)$ tel que $\forall \epsilon < \epsilon_0(\delta)$, on a $\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta$.

Nous allons chercher une fonction explicite $\epsilon^{\text{expl}}(\delta)$ avec $\epsilon^{\text{expl}}(\delta) < \epsilon_0(\delta)$. Ça nous donne

$$\left\| \phi^{\epsilon^{\text{expl}}(\delta)}(\tau/\epsilon^{\text{expl}}(\delta)) \right\| \leq \delta, \text{ pour tout } \delta.$$

La fonction $\epsilon^{\text{expl}}(\delta)$ a une fonction inverse explicite $\delta^{\text{expl}}(\epsilon)$. Donc

$$\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta^{\text{expl}}(\epsilon), \text{ pour tout } \epsilon \text{ suffisamment petit.}$$

Soit $\phi^A(t) = \phi^\epsilon(t/\epsilon)$, nous travaillons avec l'équation équivalente

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\phi^\epsilon(s) = (u \cdot \nabla + \epsilon\Delta)\phi^\epsilon(s), \\ \phi^\epsilon(0) = \phi_0. \end{cases} \tag{2}$$

Constantin et al. ont montré que pour tout τ et δ, il existe un $\epsilon_0(\delta)$ tel que $\forall \epsilon < \epsilon_0(\delta)$, on a $\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta$.

Nous allons chercher une fonction explicite $\epsilon^{\text{expl}}(\delta)$ avec $\epsilon^{\text{expl}}(\delta) < \epsilon_0(\delta)$. Ça nous donne

$$\left\| \phi^{\epsilon^{\text{expl}}(\delta)}(\tau/\epsilon^{\text{expl}}(\delta)) \right\| \leq \delta, \text{ pour tout } \delta.$$

La fonction $\epsilon^{\text{expl}}(\delta)$ a une fonction inverse explicite $\delta^{\text{expl}}(\epsilon)$. Donc

$$\|\phi^\epsilon(\tau/\epsilon)\| < \delta^{\text{expl}}(\epsilon), \text{ pour tout } \epsilon \text{ suffisamment petit.}$$

- Soit N un entier positive tel que $e^{\lambda_N \tau/80} < \delta$.
- Soit τ_1 tel que pour tout $T > \tau_1$, d'après théorème de R.A.G.E

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f \circ \Phi_t)\|^2 \, dt \leq \frac{1}{20}. \tag{3}$$

- Soit $\epsilon_0(\delta)$ tel que

$$\epsilon_0(\delta) < \min\left\{\frac{\tau}{2\tau_1}, \frac{1}{20\lambda_N \int_0^{\tau_1} B^2(t)dt}\right\}$$

ici, $B(t) = d^2 \|\Phi_t\|_{\mathrm{Lip}}$

Alors, pour trouver $\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta)$, on va chercher des expressions pour τ_1 et λ_N. Autrement dit, on va trouver une version explicite du théorème de R.A.G.E et la formule de Weyl.

- Soit N un entier positive tel que $e^{\lambda_N \tau/80} < \delta$.
- Soit τ_1 tel que pour tout $T > \tau_1$, d'après théorème de R.A.G.E

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left\| P_N(f \circ \Phi_t) \right\|^2 dt \le \frac{1}{20}. \tag{3}$$

- Soit $\epsilon_0(\delta)$ tel que

$$\epsilon_0(\delta) < \min\left\{ \frac{\tau}{2\tau_1}, \frac{1}{20\lambda_N \int_0^{\tau_1} B^2(t)dt} \right\}$$

ici, $B(t) = d^2 \left\| \Phi_t \right\|_{\mathrm{Lip}}$

Alors, pour trouver $\epsilon^{\mathrm{expl}}(\delta)$, on va chercher des expressions pour τ_1 et λ_N. Autrement dit, on va trouver une version explicite du théorème de R.A.G.E et la formule de Weyl.

- Soit N un entier positive tel que $e^{\lambda_N \tau/80} < \delta$.
- Soit τ_1 tel que pour tout $T > \tau_1$, d'après théorème de R.A.G.E

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f \circ \Phi_t)\|^2 \, dt \leq \frac{1}{20}. \tag{3}$$

- Soit $\epsilon_0(\delta)$ tel que

$$\epsilon_0(\delta) < \min\left\{\frac{\tau}{2\tau_1}, \frac{1}{20\lambda_N \int_0^{\tau_1} B^2(t)dt}\right\}$$

ici, $B(t) = d^2 \|\Phi_t\|_{\text{Lip}}$

Alors, pour trouver $\epsilon^{\text{expl}}(\delta)$, on va chercher des expressions pour τ_1 et λ_N. Autrement dit, on va trouver une version explicite du théorème de R.A.G.E et la formule de Weyl.

- Soit N un entier positive tel que $e^{\lambda_N \tau/80} < \delta$.
- Soit τ_1 tel que pour tout $T > \tau_1$, d'après théorème de R.A.G.E

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f\circ\Phi_t)\|^2\, dt \leq \frac{1}{20}. \tag{3}$$

- Soit $\epsilon_0(\delta)$ tel que

$$\epsilon_0(\delta) < \min\left\{\frac{\tau}{2\tau_1}, \frac{1}{20\lambda_N \int_0^{\tau_1} B^2(t)dt}\right\}$$

ici, $B(t) = d^2 \|\Phi_t\|_{\text{Lip}}$

Alors, pour trouver $\epsilon^{\text{expl}}(\delta)$, on va chercher des expressions pour τ_1 et λ_N. Autrement dit, on va trouver une version explicite du théorème de R.A.G.E et la formule de Weyl.

Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ les valeurs propres correspondantes aux fonctions propres $\varphi_1, \varphi_2, ...$ du Laplacien. Notons $\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda_j \leq x} 1$, la fonction de comptage.

Formule asymptotique de Weyl

$$\mathcal{N}(x) = \underbrace{(2\pi)^{-d}\omega_d(\mathbb{M})}_{\Omega_d} x^{\frac{d}{2}} + O(x^{\frac{d-1}{2}}), \tag{4}$$

où ω_d est le volume du disque unitaire dans $\mathbb{R}^d$.

Cette formule nous donne un N explicite.

Il existe alors une constante $C_3 > 0$

$$\mathcal{N}(x) \leq \left(\Omega_d + C_3 x^{-\frac{1}{2}}\right) x^{\frac{d}{2}} \tag{5}$$

Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ les valeurs propres correspondantes aux fonctions propres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ du Laplacien. Notons $\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda_j \leq x} 1$, la fonction de comptage.

Formule asymptotique de Weyl

$$\mathcal{N}(x) = \underbrace{(2\pi)^{-d}\omega_d(\mathbb{M})}_{\Omega_d} x^{\frac{d}{2}} + O(x^{\frac{d-1}{2}}), \tag{4}$$

où ω_d est le volume du disque unitaire dans $\mathbb{R}^d$.

Cette formule nous donne un N explicite.

Il existe alors une constante $C_3 > 0$

$$\mathcal{N}(x) \leq \left(\Omega_d + C_3 x^{-\frac{1}{2}}\right) x^{\frac{d}{2}} \tag{5}$$

Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ les valeurs propres correspondantes aux fonctions propres $\varphi_1, \varphi_2, ...$ du Laplacien. Notons $\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda_j \leq x} 1$, la fonction de comptage.

Formule asymptotique de Weyl

$$\mathcal{N}(x) = \underbrace{(2\pi)^{-d}\omega_d(\mathbb{M})}_{\Omega_d} x^{\frac{d}{2}} + O(x^{\frac{d-1}{2}}), \tag{4}$$

où ω_d est le volume du disque unitaire dans $\mathbb{R}^d$.

Cette formule nous donne un N explicite.

Il existe alors une constante $C_3 > 0$

$$\mathcal{N}(x) \leq \left(\Omega_d + C_3 x^{-\frac{1}{2}}\right) x^{\frac{d}{2}} \tag{5}$$

D'après le théorème Plongement de Sobolev, il existe un constant $C_4 > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} \leq C_4 \|\varphi_n\|_{H^{\frac{d}{2}+\kappa+1}} = C_4 \lambda_n^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}.$$

Soit

$$C_5 := 9^{3d/2+\kappa+1}\Omega_d^2 \frac{1800 C_1 C_4^2}{C_2}. \tag{6}$$

Rappelons C_1, C_2 viennent de supposition décroissance de la corrélation

$$|\langle f_1, f_2 \circ \Phi_t\rangle - \langle f_1, 1\rangle\langle 1, f_2\rangle| \leq C_1 e^{-C_2 t} \|f_1\|_{\mathcal{C}^\kappa} \|f_2\|_{\mathcal{C}^\kappa}$$

pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\kappa(\mathbb{M})$ et $t > 0$.

D'après le théorème Plongement de Sobolev, il existe un constant $C_4 > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} \leq C_4 \|\varphi_n\|_{H^{\frac{d}{2}+\kappa+1}} = C_4 \lambda_n^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}.$$

Soit

$$C_5 := 9^{3d/2+\kappa+1} \Omega_d^2 \frac{1800 C_1 C_4^2}{C_2}. \tag{6}$$

Rappelons C_1, C_2 viennent de supposition décroissance de la corrélation

$$|\langle f_1, f_2 \circ \Phi_t \rangle - \langle f_1, 1 \rangle \langle 1, f_2 \rangle| \leq C_1 e^{-C_2 t} \|f_1\|_{\mathcal{C}^\kappa} \|f_2\|_{\mathcal{C}^\kappa}$$

pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\kappa(\mathbb{M})$ et $t > 0$.

Proposition

Si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ satisfait la décroissance de la corrélation. Pour tous $N, T > 0$ et pour toute fonction $f \in H$ avec $\|f\| = 1$ nous avons

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f\circ\Phi_t)\|^2\,dt \le \frac{\sqrt{2C_1}C_4}{\sqrt{TC_2}} N\lambda_N^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}.$$

où P_N est la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par les N premiers vecteurs propres.

Cette proposition nous donne un τ_1 explicite.

Proposition

Si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *satisfait la décroissance de la corrélation. Pour tous* $N, T > 0$ *et pour toute fonction* $f \in H$ *avec* $\|f\| = 1$ *nous avons*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f\circ\Phi_t)\|^2\,dt \le \frac{\sqrt{2C_1}C_4}{\sqrt{TC_2}} N\lambda_N^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}.$$

où P_N est la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par les N premiers vecteurs propres.

Cette proposition nous donne un τ_1 explicite.

Proposition

Si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *satisfait la décroissance de la corrélation. Pour tous* $N, T > 0$ *et pour toute fonction* $f \in H$ *avec* $\|f\| = 1$ *nous avons*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \|P_N(f\circ\Phi_t)\|^2\,dt \leq \frac{\sqrt{2C_1}C_4}{\sqrt{TC_2}} N\lambda_N^{\frac{d+2\kappa+2}{4}}.$$

où P_N est la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par les N premiers vecteurs propres.

Cette proposition nous donne un τ_1 explicite.

Théorème (Résultat principal)

Si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ satisfait le décroissance de la corrélation, alors pour tout $t > 0$ il existe trois constantes $A_t, \Theta_t, \Xi > 0$ telles que

$$\left\|\phi^A(t)\right\| < \exp\left[-\Theta_t(\ln(\Xi A))^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}\right] \quad \textit{pour tout } A > A_t.$$

où

$$\Xi := \frac{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{90d^4}, \qquad \Theta_t := \frac{t}{80}\left(\frac{1}{C_5(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})}\right)^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}$$

$$A_t := \frac{90d^4}{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}\exp\left[(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})C_5\max\left\{1, \frac{(C_3+1)^2}{\Omega_d^2}, \frac{(2C_3)^2}{\Omega_d^2}, \frac{1}{90d^4t}\right\}^{3d/2+\kappa+1}\right].$$

Théorème (Résultat principal)

Si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ satisfait le décroissance de la corrélation, alors pour tout $t > 0$ il existe trois constantes $A_t, \Theta_t, \Xi > 0$ telles que

$$\left\|\phi^A(t)\right\| < \exp\left[-\Theta_t(\ln(\Xi A))^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}\right] \quad \textit{pour tout } A > A_t.$$

où

$$\Xi := \frac{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{90d^4}, \qquad \Theta_t := \frac{t}{80}\left(\frac{1}{C_5(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})}\right)^{\frac{2}{3d+2\kappa+2}}$$

$$A_t := \frac{90d^4}{C_5\|u\|_{\mathrm{Lip}}}\exp\left[(1+2\|u\|_{\mathrm{Lip}})C_5\max\left\{1, \frac{(C_3+1)^2}{\Omega_d^2}, \frac{(2C_3)^2}{\Omega_d^2}, \frac{1}{90d^4t}\right\}^{3d/2+\kappa+1}\right].$$

Sur le tore $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2$, les valeurs propres de $-\Delta$ sur le tore sont

$$\lambda \in \{(2\pi)^2(m^2+n^2), (m,n) \in \mathbb{Z}^2\},$$

correspondants avec les fonctions propres $e^{2\pi i(mx+ny)}$.
La fonction de comptage est explicite :

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda \le x} 1 = \#\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2+n^2 \le \frac{x}{4\pi^2}\right\}.$$

Pour tout $x > 0$ nous avons

$$\boxed{\mathcal{N}(x) \le (\sqrt{x}/\pi+1)^2}$$

Pour tout φ_n et $\kappa > 0$, nous avons

$$\boxed{\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} \le 2^{\kappa/2}\kappa\lambda_n^{\kappa/2}}$$

Sur le tore $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2$, les valeurs propres de $-\Delta$ sur le tore sont

$$\lambda \in \{(2\pi)^2(m^2+n^2), (m,n) \in \mathbb{Z}^2\},$$

correspondants avec les fonctions propres $e^{2\pi i(mx+ny)}$.
La fonction de comptage est explicite :

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda \le x} 1 = \#\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2+n^2 \le \frac{x}{4\pi^2}\right\}.$$

Pour tout $x > 0$ nous avons

$$\boxed{\mathcal{N}(x) \le (\sqrt{x}/\pi+1)^2}$$

Pour tout φ_n et $\kappa > 0$, nous avons

$$\boxed{\|\varphi_n\|_{C^\kappa} \le 2^{\kappa/2}\kappa\lambda_n^{\kappa/2}}$$

Sur le tore $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2$, les valeurs propres de $-\Delta$ sur le tore sont

$$\lambda \in \{(2\pi)^2(m^2+n^2), (m,n) \in \mathbb{Z}^2\},$$

correspondants avec les fonctions propres $e^{2\pi i(mx+ny)}$.
La fonction de comptage est explicite :

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda \le x} 1 = \#\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2+n^2 \le \frac{x}{4\pi^2}\right\}.$$

Pour tout $x > 0$ nous avons

$$\boxed{\mathcal{N}(x) \le (\sqrt{x}/\pi+1)^2}$$

Pour tout φ_n et $\kappa > 0$, nous avons

$$\boxed{\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} \le 2^{\kappa/2}\kappa\lambda_n^{\kappa/2}}$$

Sur le tore $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2$, les valeurs propres de $-\Delta$ sur le tore sont

$$\lambda \in \{(2\pi)^2(m^2+n^2), (m,n) \in \mathbb{Z}^2\},$$

correspondants avec les fonctions propres $e^{2\pi i(mx+ny)}$.
La fonction de comptage est explicite :

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{\lambda \le x} 1 = \#\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2+n^2 \le \frac{x}{4\pi^2}\right\}.$$

Pour tout $x > 0$ nous avons

$$\boxed{\mathcal{N}(x) \le (\sqrt{x}/\pi + 1)^2}$$

Pour tout φ_n et $\kappa > 0$, nous avons

$$\boxed{\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^\kappa} \le 2^{\kappa/2}\kappa\lambda_n^{\kappa/2}}$$

Théorème (La vitesse de relaxation sur le tore)

Si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *satisfait la condition décroissance de la corrélation, alors pour tout* $\tau > 0$*, on a*

$$\left\|\phi^A(\tau)\right\| \leq \exp\left[-\frac{\tau}{80}\left(\left(\frac{C_2\pi^4}{C_2\pi^4 + 1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}\ln\left(\frac{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{10d^4}A\right)\right)^{\frac{1}{2\kappa+4}} - 3\pi\right)^2\right]$$

où A satisfait

$$A \geq \frac{10d^4\exp\left[\left(1+\frac{1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}{C_2\pi^4}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{90d^4\tau}}+3\pi\right)^{2\kappa+4}\right]}{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}.$$

Théorème (La vitesse de relaxation sur le tore)

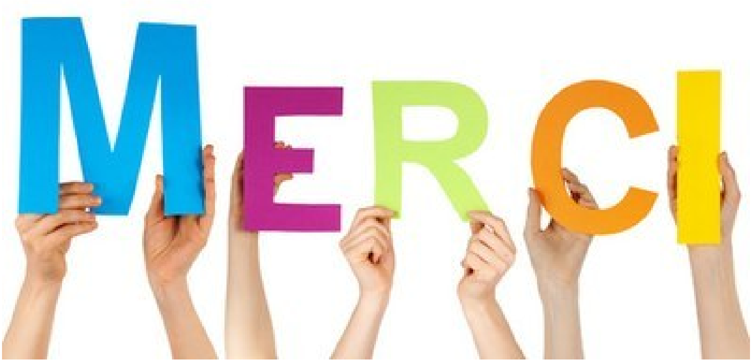
Si $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ satisfait la condition décroissance de la corrélation, alors pour tout $\tau > 0$, on a

$$\left\|\phi^A(\tau)\right\| \leq \exp\left[-\frac{\tau}{80}\left(\left(\frac{C_2\pi^4}{C_2\pi^4 + 1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}\ln\left(\frac{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}{10d^4}A\right)\right)^{\frac{1}{2\kappa+4}} - 3\pi\right)^2\right]$$

où A satisfait

$$A \geq \frac{10d^4\exp\left[\left(1+\frac{1600C_1\|u\|_{\mathrm{Lip}}\kappa^2 2^\kappa}{C_2\pi^4}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{90d^4\tau}}+3\pi\right)^{2\kappa+4}\right]}{\|u\|_{\mathrm{Lip}}}.$$

- R.A. ADAMS : *Sobolev Spaces*, Academic Press, New-York, (1978).
- P. CONSTANTIN, A. KISELEV, L. RYZHIK, A. ZLATOŠ : Diffusion and mixing in fluid flow, *Annals of Mathematics*, **168**, 643-674, (2008).
- B. FRANKE, C.-R. HWANG, H.-M. PAI, S.-J. SHEU : The behavior of the spectral gap under growing drift, *Transactions of the American Mathematical Society*, **362**, 1325-1350, (2010).
- B. FRANKE, T-H. NGUYEN : The speed of relaxation for diffusion with drift satisfying exponential decay of correlations, soumis en mai 2015.


MERCI