Grandes Déviations pour EDS de Poisson en Epidémiologie.

Brice Samegni-Kepgnou
En collaboration avec Etienne Pardoux

Université Aix-Marseille

L'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M)

JPS, Les Houches, 21 Avril 2016

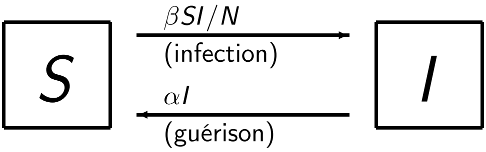
Plan

1. Motivation
   - Modèles Déterministes Compartimentaux
   - Modèles d'EDS de Poisson
2. Grandes Déviations
   - Principe de Grandes Déviations
   - Problèmes de Sortie à la frontière caractéristique

Plan

1. Motivation
   - Modèles Déterministes Compartimentaux
   - Modèles d'EDS de Poisson
2. Grandes Déviations
   - Principe de Grandes Déviations
   - Problèmes de Sortie à la frontière caractéristique

Le modèle SIS



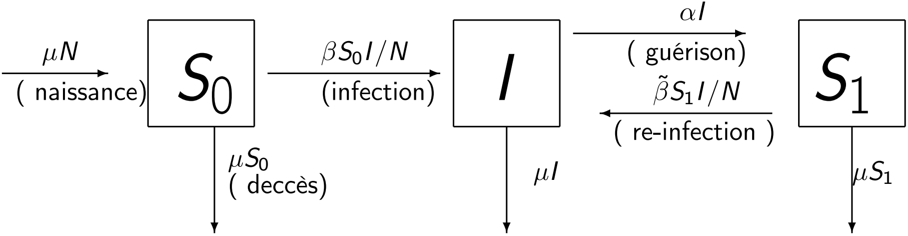
Equilibres et stabilité du modèle SIS

- En fonction de $i(t) = I(t)/N$

$$\frac{di(t)}{dt} = (\beta - \alpha)i(t) - \beta i^2(t).$$

- $R_0 =$ le nombre moyen d'individus qu'un infectieux infecte au début de l'épidémie$= \beta/\alpha$
- Si $R_0 \leq 1$, 0(DFE) est l'unique l'équilibre.
- Si $R_0 > 1$, un unique EE, $EE_1 = 1 - \alpha/\beta$ s'ajoute au DFE 0.

Modèle S_0IS_1 (M.Safan, H. Heesterbeek et K.Dietz(2006))



EDO et forme renormalisée

Posant $r = \frac{\tilde{\beta}}{\beta}$, $i(t) = \frac{I(t)}{N}$ et $s_1(t) = \frac{S_1(t)}{N}$

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \beta i(t)\big(1 - i(t) - (1-r)s_1(t)\big) - (\alpha + \mu)i(t) \\ \frac{ds_1(t)}{dt} = \alpha i(t) - \big(\mu + r\beta i(t)\big)s_1(t) \\ s_0(t) = 1 - i(t) - s_1(t). \end{cases}$$

Equilibres et Stabilités du modèle S_0IS_1

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\alpha + \mu}$$

$$\mathcal{R}_0^* = \frac{\beta^*}{\alpha + \mu} \quad \text{où} \quad \beta^* = \frac{\left(\sqrt{\mu(r-1)} + \sqrt{\alpha}\right)^2}{r}.$$

- $\mathcal{R}_0 > 1$, un unique équilibre endémique(EE) existe en plus de l'équilibre sans maladie(DFE).
- $\mathcal{R}_0^* < \mathcal{R}_0 < 1$ and $r > 1 + \mu/\alpha$ deux équilibres endémiques(EE_1, EE_2) existent ainsi qu'un équilibre sans maladie(DFE).
- $0 < \mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_0^*$ or ($\mathcal{R}_0^* < \mathcal{R}_0 < 1$ and $r < 1 + \mu/\alpha$), seul le DFE existe.

Frontière caractéristique du modèle $S_0 I S_1$(en bleu)

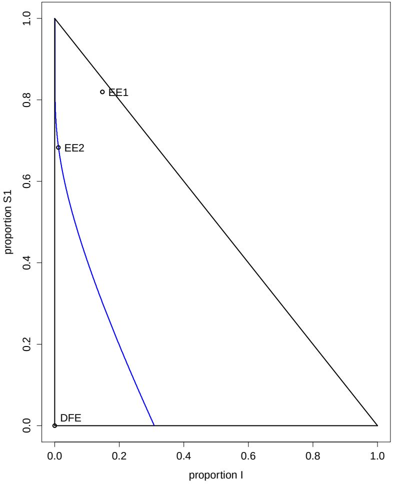


Figure: $\beta = 3$,$\alpha = 5$, $r = 2$ et $\mu = 0.015$

Modèle d'EDS de Poisson

$$Y^z(t) = z + \int_0^t \sum_{j=1}^{k} h_j \beta_j(Y^z(s))ds \tag{1}$$

$$Z^N(t) := Z^{N,z}(t) := \frac{[N.z]}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{k} h_j P_j\left(N \int_0^t \beta_j(Z^N(s))ds\right) \tag{2}$$

$$A = \left\{z \in \mathbb{R}_+^d : \sum_{i=1}^{d} z_i \leq 1\right\} \tag{3}$$

Questions

- Quelle est la différence entre la solution de l'EDO et celle de l'EDS poissonienne quand N est grand ?
- La solution de l'EDS peut-elle passer du bassin d'attraction d'un équilibre stable de l'EDO à un autre (avec N grand) ?
- Combien de temps faut–il attendre pour que cela se produise ?

Plan

1. Motivation
   - Modèles Déterministes Compartimentaux
   - Modèles d'EDS de Poisson
2. Grandes Déviations
   - Principe de Grandes Déviations
   - Problèmes de Sortie à la frontière caractéristique

Fonction de taux

Fixons $\phi \in \mathcal{AC}_{T,A}$

$$I_T(\phi) = \inf_{\mu} \sum_{j=1}^{k} \int_0^T f(\mu_t^j, \beta_j(\phi_t))dt$$

où

$$f(z,\lambda) = z \log \frac{z}{\lambda} - z + \lambda, \quad z, \lambda \geq 0$$

et μ est une fonction mesurable positive à valeurs dans $\mathbb{R}_+^k$ telle que

$$\frac{d\phi_t}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \mu_t^j h_j.$$

- $I_T(\phi) = 0$ ssi $\phi = Y$ est solution de l'ODE sur $[0, T]$.
- $I_T(\phi)$ s'interprète comme l'énergie nécessaire pour que le système suive ϕ plutôt que Y.

Principe de Grandes déviations(LDP)

Théorème

La famille de solution de l'EDS Poissonienne noté $Z^{N,z}$ et définie en (2) satisfait au LDP sur $D_{T,A}$ avec une "bonne" fonction de taux I_T.

i.e

- $I_T : D_{T,A} \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement.
- Pour tout sous ensemble ouvert G de $D_{T,A}$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{P}_z(Z^N \in G) \geq - \inf_{\phi\in G, \phi_0 = z} I_T(\phi).$$

- pour tout sous ensemble fermé F de $D_{T,A}$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{P}_z(Z^N \in F) \leq - \inf_{\phi\in F, \phi_0 = z} I_T(\phi).$$

Remarques bibliographiques

- Shwartz et Weiss 1995, Dupuis et Ellis 1997, Feng et Kurtz 2006,.
- Une difficulté pour nous : certains taux s'annulent quand le processus atteint la frontière de A, donc le logarithme correspondant devient infini !
    - Shwartz et Weiss(2005)
    - P.Kratz et E.Pardoux(2016), B.Samegni et E.Pardoux(201 ?).

Notations

- $O =$ bassin d'attraction d'un équilibre $z^* = EE_1$.
- L'énergie minimale nécessaire pour aller de z à y dans l'intervalle de temps $[0, T]$

$$V_{\bar{O}}(z, y, T) := \inf_{\phi : \phi(0) = z, \phi(T) = y} I_T(\phi)$$

- L'énergie minimale nécessaire pour aller de z à y

$$V_{\bar{O}}(z, y) := \inf_{T > 0} V_{\bar{O}}(z, y, T)$$

- L'énergie minimale pour aller de z^* à la frontière caractéristique $\widetilde{\partial O}$

$$V_{\widetilde{\partial O}} := \inf_{y \in \widetilde{\partial O}} V_{\bar{O}}(z^*, y)$$

Point de sortie d'un bassin d'attraction

- Pour un point $z \in O$, par quel point de la frontière caractéristique $Z^{N,z}$ sort–il de O (et en suivant quelle trajectoire) ?

$$\tau_O^{N,z} = \inf\{t > 0 : Z^{N,z}(t) \notin O\}$$

- Nous montrons le résultat suivant

Théorème

Pour tout $z \in O$, $y \in \partial\widetilde{O}$ et pour tout η, $\delta_0 > 0$ il existe $\delta < \delta_0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$, de sorte que pour tout $N > N_0$

$$\exp(-N(S_z(y) + \eta)) \leq \mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y| < \delta)$$

et

$$\mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y| < \delta) \leq \exp(-N(S_z(y) - \eta))$$

où $S_z(y)$ est défini par : $S_z(y) = V(z, y) \wedge (V(z^*, y) - V_{\widetilde{\partial O}})$.

Point de sortie d'un bassin d'attraction

- Pour un point $z \in O$, par quel point de la frontière caractéristique $Z^{N,z}$ sort–il de O (et en suivant quelle trajectoire) ?

$$\tau_O^{N,z} = \inf\{t > 0 : Z^{N,z}(t) \notin O\}$$

- Nous montrons le résultat suivant

Théorème

Pour tout $z \in O$, $y \in \widetilde{\partial O}$ et pour tout η, $\delta_0 > 0$ il existe $\delta < \delta_0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$, de sorte que pour tout $N > N_0$

$$\exp(-N(S_z(y) + \eta)) \leq \mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y| < \delta)$$

et

$$\mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y| < \delta) \leq \exp(-N(S_z(y) - \eta))$$

où $S_z(y)$ est défini par : $S_z(y) = V(z, y) \wedge (V(z^*, y) - V_{\widetilde{\partial O}})$.

Une conséquence du théorème

- S'il existe un unique point $y^* \in \widetilde{\partial O}$ tel que $V(z^*, y^*) = V_{\widetilde{\partial O}}$ alors

$$\forall \delta > 0, \forall z \in O, \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y^*| < \delta) = 1.$$

- Pour le modèle SIS, $y^* = 0$ (DFE).
- Pour le modèle S_0IS_1, nous pensons que $y^* = EE_2$ (Equilibre instable).

Une conséquence du théorème

- S'il existe un unique point $y^* \in \widetilde{\partial O}$ tel que $V(z^*, y^*) = V_{\widetilde{\partial O}}$ alors

$$\forall \delta > 0, \forall z \in O, \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y^*| < \delta) = 1.$$

- Pour le modèle SIS, $y^* = 0$ (DFE).
- Pour le modèle S_0IS_1, nous pensons que $y^* = EE_2$ (Equilibre instable).

Une conséquence du théorème

- S'il existe un unique point $y^* \in \widetilde{\partial O}$ tel que $V(z^*, y^*) = V_{\widetilde{\partial O}}$ alors

$$\forall \delta > 0, \forall z \in O, \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}_z(|Z^N(\tau_O^N) - y^*| < \delta) = 1.$$

- Pour le modèle SIS, $y^* = 0$ (DFE).
- Pour le modèle S_0IS_1, nous pensons que $y^* = EE_2$ (Equilibre instable).

- Pour tout $z \in O$, quand est ce que $Z^{N,z}$ sort–il de O (et entre dans le bassin d'attraction d'un autre équilibre) ?
- P.Kratz et E.Pardoux ont montré que

Théorème

Pour tout $z \in O$, $\eta > 0$,

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\Big(\exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} - \eta)\} < \tau_O^{N,z} < \exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} + \eta)\} \Big) = 1.$$

- Ceci signifie que pour N grand,

$$\tau_O^{N,z} \approx \exp\{N.V_{\widetilde{\partial O}}\}$$

Temps de sortie du Bassin d'attraction

- Pour tout $z \in O$, quand est ce que $Z^{N,z}$ sort–il de O (et entre dans le bassin d'attraction d'un autre équilibre) ?
- P.Kratz et E.Pardoux ont montré que

Théorème

Pour tout $z \in O$, $\eta > 0$,

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\big(\exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} - \eta)\} < \tau_O^{N,z} < \exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} + \eta)\}\big) = 1.$$

- Ceci signifie que pour N grand,

$$\tau_O^{N,z} \approx \exp\{N.V_{\widetilde{\partial O}}\}$$

Temps de sortie du Bassin d'attraction

- Pour tout $z \in O$, quand est ce que $Z^{N,z}$ sort–il de O (et entre dans le bassin d'attraction d'un autre équilibre) ?
- P.Kratz et E.Pardoux ont montré que

Théorème

Pour tout $z \in O$, $\eta > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big(\exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} - \eta)\} < \tau_O^{N,z} < \exp\{N(V_{\widetilde{\partial O}} + \eta)\}\big) = 1.$$

- Ceci signifie que pour N grand,

$$\tau_O^{N,z} \approx \exp\{N.V_{\widetilde{\partial O}}\}$$

Calcul numérique de $V_{\widetilde{\partial O}}$

- Nous voulons calculer

$$V_{\widetilde{\partial O}} := \inf_{T,\phi:\phi(0)=z^*,\phi(T)=y^*} \inf_{\mu} \int_0^T \sum_{j=1}^{k} f(\mu_s^j, \beta_j(\phi_s))dt,$$

où μ est une fonction mesurable positive telle que

$$\frac{d\phi_t}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \mu_t^j h_j$$

Programmation Dynamique

- Pour $t \in [0, T]$, $z \in O$,

$$W^T(t,z) = \inf_{\phi;\phi(t)=z,\phi(T)=y^*} \inf_{\mu} \int_t^T \sum_{j=1}^{k} f(\mu_s^j, \beta_j(\phi_s))ds \qquad (4)$$

- Nous faisons une discrétisation du temps : $t_{\ell+1} - t_\ell = \Delta t$ et $z \in \mathcal{G}$ (La grille de l'espace d'état).

$$W^T(t_\ell, z) = \inf_{\mu} \left\{ W\left(t_{\ell+1}, z + \sum_{j=1}^{k} \mu^j h_j\right) + \sum_{j=1}^{k} f(\mu^j, \beta_j(z))\Delta t \right\},$$

Application au modèle SIS

- $d = 1$, $\widetilde{\partial O} = \{0\}$, $\beta = 1.5$, $\alpha = 1$, $T = 40$, $V_{\widetilde{\partial O}} = 0.0702$

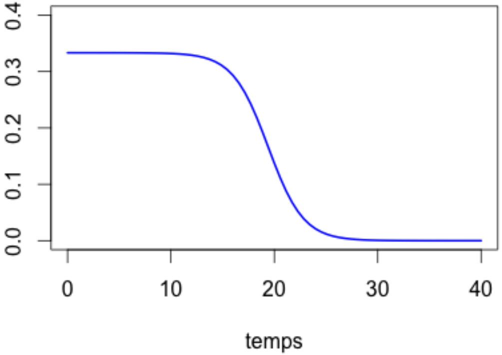


Figure: Trajectoire optimale

Merci pour votre attention !

- P. Kratz, E. Pardoux and B. Samegni-Kepgnou, Numerical methods in the context of compartmental models in epidemiology, *ESAIM : Proceedings and Surveys* **48**, 169–189, 2015.
- P. Kratz and E. Pardoux, Large deviations for infection diseases models, arXiv :1602.02803, 2016.
- M. Safan, H. Heesterbeek and K. Dietz, The minimum effort required to eradicate infections in models with backward bifurcation, *J. Math. Biol.* **53**, 703–718, 2006.
- B.Samegni-Kepgnou and E. Pardoux, Large deviations for Poisson Driven SDE in Epidemiology, to be submitted.
- B. Samegni-Kepgnou and E. Pardoux, Position of exit from a Domain for Poisson Driven SDE in Epidemiology, to be submitted.
- A. Shwartz and A. Weiss, Large deviations with diminishing rates, *Mathematics of Operations Research* **30** 281–310, 2005.