Fonctionnelles exponentielles et temps local d'une diffusion en milieu aléatoire

Jeunes Probabilistes et Statisticiens

Grégoire Véchambre

Université d'Orléans

Avril 2016

Objets étudiés

Soit V un processus de Lévy issu de 0.

Fonctionnelle exponentielle :

$$I(V) := \int_0^{+\infty} e^{-V(t)} dt$$

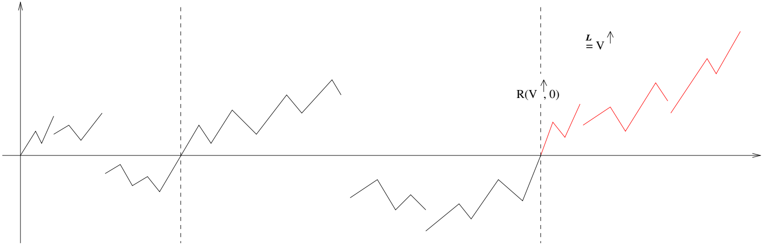
a déjà été intensément étudiée (Bertoin, Yor, ...).

Hypothèse : Les sauts éventuels de V sont tous négatifs (V est spectrallement négatif).

$$I(V^{\uparrow}) := \int_0^{+\infty} e^{-V^{\uparrow}(t)} dt.$$

Questions : Finie ? Queues de distribution ? Propriétés particulières ? Densité ? Régularité de la densité ?

Décomposition d'une trajectoire de V



$$I(V) \overset{\mathcal{L}}{=} S_T + I(V^{\uparrow}),$$

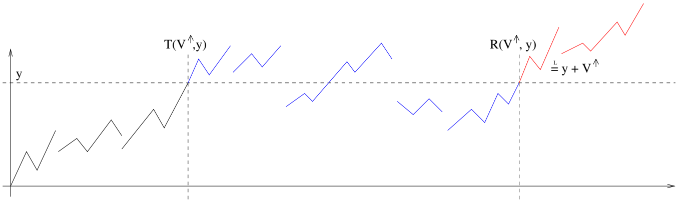
Il est connu que $I(V) < +\infty$ p.s. si $V \longrightarrow +\infty$ p.s., ainsi :

$$I(V^{\uparrow}) < +\infty \; p.s.$$

De plus

$$\mathbb{P}\left(I(V^{\uparrow}) \leq x\right) \approx \mathbb{P}\left(I(V) \leq x\right).$$

Auto-décomposabilité de $I(V^{\uparrow})$



Proposition (V. 2015, Auto-décomposabilité)

$$\forall y > 0,\ \ I(V^{\uparrow}) \overset{\mathcal{L}}{=} A^{y} + e^{-y} I(V^{\uparrow}),$$

où les termes de droite sont indépendants.

En conséquence $I(V^{\uparrow})$ admet une densité et

$$I(V^{\uparrow}) \overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{k\geq 0} e^{-ky} A_k^{y},\ \text{ avec } (A_k^{y})_{k\geq 0} \textit{ iid} \text{ de même loi que } \ A^{y}.$$

Moments exponentiels

Hypothèse (H1) : Il existe $\gamma > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{-\gamma V(1)}] < +\infty$.

On montre que sous l'hypothèse (H1), A^y admet des moments exponentiels.

En combinant avec $I(V^{\uparrow}) \overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{k\geq 0} e^{-ky} A_k^y$ on obtient :

Théorème (V. 2015)

$$(H1) \Rightarrow \exists\lambda > 0,\ \mathbb{E}\left[e^{\lambda I(V^{\uparrow})}\right] < +\infty$$

Remarques :

- Si V converge vers $-\infty$, l'hypothèse (H1) n'est pas nécesaire,
- Ce comportement est très différent de celui connu pour $I(V)$.

Laplace exponent

Le fait que V n'effectue pas de sauts positifs implique l'existence d'une fonction Ψ_v telle que

$$\forall t, \lambda \geq 0,\ \mathbb{E}\left[e^{\lambda V(t)}\right] = e^{t\Psi_V(\lambda)}.$$

L'expression de Ψ_V est donné par la formule de Lévy-Kintchine :

$$\Psi_V(\lambda) = \frac{Q}{2}\lambda^2 - \gamma\lambda + \int_{-\infty}^{0} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbb{1}_{|x|<1})\nu(dx), \qquad (1)$$

où :

- $Q > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ sont des réels,
- ν est une mesure telle que $\int (1 \wedge |x|^2)\nu(dx) < +\infty$.

On montre que pour λ grand :

$$c\lambda \leq \Psi_V(\lambda) \leq C\lambda^2.$$

Laplace exponent et queues en 0

Hypothèse (H2-α) : Pour λ grand $c\lambda^\alpha \leq \Psi_V(\lambda) \leq C\lambda^\alpha$.

Théorème (V. 2015)

Sous (H2-α) pour $\alpha > 1$, il existe deux constantes positives, $K_1, K_2 > 0$ telles que pour x suffisamment petit

$$\exp\left(-\frac{K_2}{x^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right) \leq \mathbb{P}\left(I(V) \leq x\right) \leq \mathbb{P}\left(I(V^\uparrow) \leq x\right) \leq \exp\left(-\frac{K_1}{x^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right)$$

- On utilise le fait que $\mathbb{P}\left(I(V^\uparrow) \leq x\right) \approx \mathbb{P}\left(I(V) \leq x\right)$.
- **Majoration** : On majore les moments entiers de $1/I(V)$ qui sont connus en fonction de Ψ_V.
- **Minoration** : On étudie $\mathbb{P}(A^y \leq x)$.

Laplace exponent et queues en 0

L'hypothèse (H2-α) est assez restrictive. On définit plus généralement :

$$\sigma := \sup\left\{\alpha \geq 0,\ \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-\alpha}\Psi_V(\lambda) = \infty\right\},$$

$$\beta := \inf\left\{\alpha \geq 0,\ \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-\alpha}\Psi_V(\lambda) = 0\right\}.$$

Théorème (V. 2015)

Pour tout $1 < \sigma' < \sigma, \beta' > \beta$ *et tout* x *suffisamment petit*

$$\exp\left(-\frac{1}{x^{\frac{1}{\sigma'-1}}}\right) \leq \mathbb{P}\left(I(V) \leq x\right) \leq \mathbb{P}\left(I(V^{\uparrow}) \leq x\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{x^{\frac{1}{\beta'-1}}}\right)$$

Laplace exponent et densité

On sait déjà que $I(V)$ et $I(V^{\uparrow})$ admettent des densités.

En étudiant A^y on obtient la régularité de la densité :

Théorème (V. 2015)

Si $\sigma > 1$ et β sont tels que

$$2\beta^2 - 3\sigma\beta + \sigma + \beta - 1 < 0, \tag{2}$$

alors les densités de $I(V)$ et $I(V^{\uparrow})$ sont $\mathcal{C}^{\infty}$, toutes leurs dérivées convergent vers 0 en $+\infty$ et en 0. Si de plus $I(V^{\uparrow})$ admet des moments à tout ordre, alors la densité de $I(V^{\uparrow})$ est dans l'espace de Schwartz.

Remarque : Sous $(H2-\alpha)$ pour $\alpha > 1$, on a $\sigma = \beta = \alpha$ et (2) devient alors $-(\alpha-1)^2 < 0$.

Diffusions en milieu aléatoire

On considère le processus de diffusion $(X(t))_{t\geq 0}$ qui se déplace dans un milieu aléatoire donné par le potentiel V :

$$\begin{cases} dX_t = V'(X_t)dt + dB_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Dans l'étude d'une telle diffusion, il faut tenir compte de deux aléas distincts :

- Celui du au milieu V,
- Celui du au déplacement aléatoire dans V.

Ici, on prend pour V un processus de Lévy sans sauts positifs qui converge presque surement vers $-\infty$.

Dans ce cas la diffusion est transiente et converge vers $+\infty$. Soit

$$\kappa := \inf\{\lambda > 0,\ \Psi_V(\lambda) = 0\}.$$

Temps local

On montre qu'il existe un processus $(L_X(t, y),\ t \geq 0, y \in \mathbb{R})$ qui satisfait la formule des densités d'occupation :

$$\forall t \geq 0,\ \forall f \in L^\infty,\ \int_0^t f(X_s)ds = \int_{\mathbb{R}} f(y) L_X(t, y) dy.$$

$(L_X(t, y), t \geq 0, y \in \mathbb{R})$ est continu en temps et càd-làg en espace. On l'appelle **temps local** de la diffusion X.

Supremum du temps local :

$$\forall t \geq 0,\ L_X^*(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}} L_X(t, x).$$

Théorème (Andreoletti, Devulder, V. 2015, V. 2016+)

Si $0 < \kappa < 1$, V est à VNB et $V(1) \in L^p$ (pour un $p > 1$),

$$L_X^*(t)/t \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{I}$$

où la loi limite $\mathcal{I}$ s'exprime en fonction de $I(V^\uparrow)$ et de $I((-V)^\uparrow)$.

Limite supérieure quand $0 < \kappa < 1$

On suppose que $0 < \kappa < 1$, V est à VNB et $V(1) \in L^p$ $(p > 1)$.

On relie le comportement du temps local à la queue à gauche de la variable $I(V^{\uparrow})$:

$$\mathbb{P}\left(I(V^{\uparrow}) \leq x\right) \leq \exp\left(-\frac{C}{x^{\frac{1}{\gamma-1}}}\right) \Rightarrow \limsup_{t\to+\infty} \frac{\mathcal{L}_X^*(t)}{t(\log(\log(t)))^{\gamma-1}} \leq C^{1-\gamma}.$$

$$\mathbb{P}\left(I(V^{\uparrow}) \leq x\right) \geq \exp\left(-\frac{C}{x^{\frac{1}{\gamma-1}}}\right) \Rightarrow \limsup_{t\to+\infty} \frac{\mathcal{L}_X^*(t)}{t(\log(\log(t)))^{\gamma-1}} \geq C^{1-\gamma}.$$

Si $V(t) = W(t) - \frac{\kappa}{2}t$ il faut remplacer $I(V^{\uparrow})$ par $I(V^{\uparrow}) + \tilde{I}(V^{\uparrow})$ où $\tilde{I}(V^{\uparrow})$ est une copie indépendante de $I(V^{\uparrow})$.

Limite supérieure quand $0 < \kappa < 1$

En combinant avec les résultats sur la queue à gauche de $I(V^{\uparrow})$:

$$\forall \sigma' < \sigma, \beta' > \beta, \ \exp\left(-\frac{1}{x^{\frac{1}{\sigma'-1}}}\right) \leq \mathbb{P}\left(I(V^{\uparrow}) \leq x\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{x^{\frac{1}{\beta'-1}}}\right),$$

on obtient :

Théorème (V. 2016+)

Si $0 < \kappa < 1$, V est à VNB et $V(1) \in L^p$ (pour un $p > 1$), on a presque surement

$$\forall \beta' > \beta, \ \limsup_{t \to +\infty} \frac{\mathcal{L}_X^*(t)}{t(\log(\log(t)))^{\beta'-1}} = 0, \tag{4}$$

et

$$\textit{si } \sigma > 1, \ \forall \sigma' \in]1, \sigma[, \ \limsup_{t \to +\infty} \frac{\mathcal{L}_X^*(t)}{t(\log(\log(t)))^{\sigma'-1}} = +\infty. \tag{5}$$

Limite supérieure quand $0 < \kappa < 1$

Sous **(H2-α) :** $\exists c, C > 0$ tels que $c\lambda^\alpha \leq \Psi_V(\lambda) \leq C\lambda^\alpha$, pour $\alpha > 1$ on avait :

$$\exists K_1, K_2 > 0, \ \exp\left(-\frac{K_2}{x^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right) \leq \mathbb{P}\left(I(V^\uparrow) \leq x\right) \leq \exp\left(-\frac{K_1}{x^{\frac{1}{\alpha-1}}}\right)$$

Théorème (V. 2016+)

Si $0 < \kappa < 1$, V est à VNB, $V(1) \in L^p$ $(p > 1)$ et (H2-α) est satisfaite alors presque surement

$$0 < \limsup_{t \to +\infty} \frac{\mathcal{L}_X^*(t)}{t(\log(\log(t)))^{\alpha-1}} < +\infty.$$

En particulier si $V(t) = W(t) - \frac{\kappa}{2} t$ alors

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{\mathcal{L}_X^*(t)}{t(\log(\log(t)))} = \frac{1}{8}.$$

Bibliographie

Andreoletti, Devulder, Véchambre, *Renewal structure and local time for diffusions in random environment* (en révision pour ALEA), 2015

Bertoin, *Lévy processes*, 1996

Bertoin, Yor, *Exponential functionals of Lévy processes*, 2005

Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, 1999

Véchambre, *Exponential functionals of spectrally one-sided Lévy processes conditioned to stay positive* (soumis), 2015

Véchambre, *Path decompostion of a spectrally negative Lévy process, and application to the local time of a diffusion in this environment* (en préparation), 2016+

Véchambre, *Almost sure behavior for the local time of a diffusion in a spectrally negative Lévy environment* (en préparation), 2016+